

PROBABILISTYCZNE ASPEKTY TWIERDZENIA TAKENSA O ZANURZANIU

Zaproponowany projekt dotyczy probabilistycznych aspektów twierdzenia Takensa o zanurzaniu - klasycznego wyniku teorii układów dynamicznych. Jest to teoria mająca swoje początki w badaniu matematycznych zagadnień związanych z grawitacją newtonowską. Okazało się, że dla układów trzech lub więcej ciał (np. dla układu słonecznego), ich ewolucja w czasie pod wpływem sił grawitacyjnych (zadana jako rozwiązanie odpowiedniego równania różniczkowego) nie przedstawia się za pomocą jawnie danych wzorów. Począwszy od Poincaré'go na początku dwudziestego wieku, zaczęto stosować do ich analizy metody jakościowe. Z czasem, metody te przekształciły się w abstrakcyjną matematyczną dziedzinę układów dynamicznych, zachowującą jednak silne związki z zastosowaniami (w szczególności do fizyki matematycznej). Wcześniej zdano sobie również sprawę, że ważnych narzędzi w badaniu układów dynamicznych dostarczają metody stochastyczne, znane dzisiaj jako *teoria ergodyczna* (której początki sięgają prac Boltzmanna dotyczących fizyki statystycznej).

Twierdzenie Takensa o zanurzaniu, które jest podstawą dla proponowanego projektu, dotyczy problemu odtwarzania układu dynamicznego z ciągu pomiarów wykonanych za pomocą danej obserwabli. Wyobraźmy sobie doświadczalnika obserwującego układ fizyczny modelowany za pomocą układu dynamicznego z czasem dyskretnym, czyli ciągu iteracji ustalonego odwzorowania na zadanej przestrzeni fazowej (być może zanurzonej w przestrzeni wysokiego wymiaru). Często zdarza się, że zamiast ciągu k kolejnych rzeczywistych stanów układu, obserwator ma dostęp jedynie do wartości k pomiarów pewnej obserwabli w tych stanach. Przez obserwabłą rozumiemy funkcję, która każdemu punktowi przestrzeni fazowej przypisuje liczbę rzeczywistą (np. temperaturę). Można zadać naturalne pytanie: w jakim stopniu wyjściowy system może być zrekonstruowany na podstawie takiego ciągu pomiarów? Powyższe pytanie zainspirowało szereg wyników matematycznych, znanych jako *twierdzenia typu Takensa o zanurzaniu*, orzekających że rekonstrukcja oryginalnego systemu jest możliwa dla pewnych obserwabli, o ile liczba pomiarów k jest wystarczająco duża. Pierwszym wynikiem tego typu było słynne twierdzenie Florisa Takensa (1980), orzekające że jeśli przestrzeń fazowa jest rozmaitością (zbiorem o "porządnej" geometrii), to stan początkowy układu jest wyznaczony jednoznacznie przez pomiary, o ile ich liczba jest większa niż *dwukrotność wymiaru przestrzeni fazowej*. Wynik ten został z czasem rozszerzony na zbiory o bardziej skomplikowanej geometrii. Jest to szczególnie przydatne w dynamice chaotycznej, gdzie często przedmiotem zainteresowania jest atraktor (zbiór do którego pod wpływem dynamiki zbiega dowolny stan początkowy) o fraktalnym charakterze. Wyniki typu Takensa pozwalają także przyjąć wykres k -wymiarowych wektorów pomiarów jako wiarygodną reprezentację oryginalnego układu w przestrzeni k -wymiarowej. Twierdzenia te są uznawane za teoretyczne wyniki uzasadniające poprawność wykorzystywanych w praktyce procedur.

W proponowanym projekcie planujemy badać *probabilistyczne* aspekty twierdzenia Takensa. Rozważamy sytuację w której dostępne stany początkowe pochodzą z zadanego rozkładu prawdopodobieństwa i jesteśmy zainteresowani rekonstrukcją układu względem tego rozkładu. Innymi słowy, żądamy aby ciąg pomiarów odtwarzał jednoznacznie stan początkowy niekoniecznie dla dowolnego możliwego stanu początkowego, ale dla *typowego* stanu początkowego generowanego przez zadany generator losowy. Powyższe założenie często jest uzasadnione z punktu widzenia zastosowań. Przyjmując ten punkt widzenia, Barański, Gutman oraz Śpiewak udowodnili niedawno probabilistyczną wersję twierdzenia Takensa. Jej kluczowym wnioskiem jest obserwacja, że dla rekonstrukcji wystarczy brać liczbę pomiarów większą niż wymiar przestrzeni fazowej, co daje dwukrotną redukcję liczby obserwacji w stosunku do wersji nieprobabilistycznej. Możliwość dwukrotnego zredukowania liczby obserwacji w kontekście probabilistycznym została postawiona w hipotezach Shroera, Sauera, Otta oraz Yorke'a (*Phys. Rev. Lett.* 80, 1998). Ponieważ jednak autorzy hipotez rozpatrują inne pojęcie wymiaru, nakładają inne wymagania na proces rekonstrukcji oraz przewidują tempo ubywania prawdopodobieństwa błędu, powyższe twierdzenie nie rozstrzyga hipotez Shroera, Sauera, Otta oraz Yorke'a. Pierwszym celem projektu jest zrozumienie związków między tymi zagadnieniami oraz praca w kierunku udowodnienia hipotez i ich uogólnień. Drugim celem projektu jest otrzymanie dalszych rozszerzeń probabilistycznego twierdzenia Takensa. Po pierwsze, planujemy określić wielkość zbioru wyjątkowych stanów i obserwabli (czyli tych dla których twierdzenie nie zachodzi) w języku ich wymiaru. Po drugie, będziemy pracować nad otrzymaniem dodatkowej regularności procesu rekonstrukcji. Będziemy rozważać także topologiczny odpowiednik twierdzenia Takensa oraz jego wersję dla skończonego wymiarowych podzbiorów przestrzeni nieskończonego wymiarowych. Drugie z tych zagadnień może umożliwić zastosowania np. do skończonego wymiarowych atraktorów dla rozwiązań dwuwymiarowych równań Naviera-Stokesa.

Spodziewanym efektem projektu jest rozwinięcie teorii probabilistycznych twierdzeń typu Takensa, których wyniki mogą być przydatne przy wykorzystywanej w praktyce procedurze rekonstrukcji układu z ciągu pomiarów. Z matematycznej perspektywy, spodziewane wyniki pomogą w lepszym zrozumieniu probabilistycznych aspektów teorii zanurzeń układów dynamicznych.