

Struktura permutacji losowych i proces wymiany

popularnonaukowe streszczenie projektu

Michał Kotowski

Wyobraźmy sobie, że mamy talię N kart, którą chcemy potasować następującym sposobem: w każdym kroku wybieramy losowo dwie karty i zamieniamy je miejscami. Ile kroków potrzebujemy wykonać, aby talia była dobrze potasowana? Jaka jest typowa struktura otrzymanej permutacji kart?

Modele tasowania kart takie, jak opisany powyżej (tzw. *proces wymiany* na grafie pełnym), są klasycznym obiektem badań w teorii łańcuchów Markowa i ich zastosowań. Pewnym zaskoczeniem jest fakt, że podobne modele są blisko związane z fundamentalnymi pytaniami w fizyce statystycznej, w szczególności z badaniem przejść fazowych w kwantowych układach spinowych.

Znanym modelem ferromagnetyzmu jest *ferromagnetyczny kwantowy model Heisenberga*, o którym przypuszcza się, że w niskich temperaturach zachodzi w nim przejście fazowe – poniżej temperatury krytycznej układ wykazuje niezerową spontaniczną magnetyzację. Okazuje się, że analogiczne przejście fazowe ma miejsce w modelach *przestrzennych permutacji losowych* takich jak proces wymiany – kiedy wykonamy dostatecznie wiele transpozycji, nagle w strukturze cyklowej permutacji pojawiają się długie (makroskopowe) cykle.

Niniejszy projekt znajduje się na granicy pomiędzy teorią prawdopodobieństwa a fizyką matematyczną. Zamierzamy badać strukturę cyklową różnych modeli permutacji losowych, w szczególności procesu wymiany na grafach o złożonej geometrii. Poza matematycznym pięknem tej tematyki, naszą motywacją jest rzucenie nowego światła na ważne pytania z fizyki statystycznej. W szczególności chcielibyśmy dokonać postępu na drodze do rozwiązania słynnej hipotezy postawionej przez Bálinta Tótha, mówiącej, że w strukturze cyklowej procesu wymiany na d -wymiarowej kratce \mathbb{Z}^d w wymiarach $d \geq 3$ zachodzi przejście fazowe.

Mamy nadzieję, że niniejszy projekt, stanowiący pomost między klasycznymi tematami z teorii łańcuchów Markowa i przejść fazowych w fizyce, zaowocuje głębszym zrozumieniem przestrzennych permutacji losowych, aktualnie żywo badanego tematu, i ich *uniwersalności* – zjawiska, w którym różne modele permutacji wykazują asymptotycznie takie samo zachowanie.