Krótkie odcinki pomiędzy liczbami prawie pierwszymi

Paweł Lewulis

Liczby pierwsze są centralnym obiektem badań analitycznej teorii liczb. Ich znaczenie wzrosło jeszcze bardziej w ciągu ostatniego stulecia z uwagi na zastosowania w nowoczesnej kryptografii. Istnieje wiele hipotez skupionych wokół nich jak hipoteza liczb bliźniaczych czy też jeszcze ogólniejsza hipoteza Hardy'ego–Littlewooda o k-tkach. Z drugiej z nich wynika np. istnienie nieskończenie wielu takich n takich, że wszystkie elementy zbioru $\{n, n+2, n+6, n+8\}$ (zbiór ten szczególnym przypadkiem tzw. *k-tki dopuszczalnej* dla $k=4$) są pierwsze. Hipoteza ta znajduje się poza zasięgiem aktualnie znanych metod, jednak po jej odpowiednim zmodyfikowaniu, można podjąć się próby jej zaatakowania. Na przykład James Maynard pokazał, że każda dopuszczalna trójka (np. $\{n, n+2, n+6\}$) dla nieskończenie wielu n składa się z liczb, które zawierają łącznie co najwyżej 7 czynników pierwszych. Podobne wyniki istnieją także dla k większych niż 3.

Pierwszym celem projektu będzie znalezienie jak najmniejszych wartości ϱ_k takich, żeby każda dopuszczalna k-tka zawierała łącznie co najwyżej ϱ_k czynników pierwszych dla nieskończenie wielu n.

Rezultaty takie jak te opisane powyżej, osiąga się zazwyczaj dzięki silnym narzędziom, które pozwalają na dokładne szacowanie liczby liczb pierwszych w ciągach arytmetycznych. W kontekście teorii sit, klasycznym przykładem jest twierdzenie Bombieri'ego–Winogradowa. W związku z tym drugi, pomniejszy cel niniejszego projektu polega na odkryciu zależności pomiędzy tzw. hipotezą Elliotta–Halberstama (EH), a jej uogólnioną wersją (GEH). Autor uważa, że istnieje mozliwość wykazania, że EH implikuje GEH w pewnych przypadkach, co przekładałoby się na wzmocnienie wielu znanych rezultatów. Nasza wiedza na temat par liczb pierwszych leżących blisko siebie uległaby poszerzeniu.

Zarówno badanie hipotezy Elliotta−Halberstama jak i k-tek liczb prawie pierwszych (są to liczby o małej liczbie czynników pierwszych) są ważne z tego samego powodu – dzięki nim można wiele dowiedzieć się o samych liczbach pierwszych, które leżą w centrum zainteresowania matematyków z kilku różnych dyscyplin. Urok liczb prawie pierwszych polega przede wszystkim na tym, że w bardzo dużym stopniu przypominają one 'prawdziwe' liczby pierwsze. Dzięki temu stanowią one swoisty poligon doświadczalny dla metod, które tworzymy do zgłębienia struktury ukrytej za liczbami pierwszymi. W ten sposób bardzo dokładnie poznajemy takie ograniczenia naszych technik jak np. problem parzystości. Być może dzięki podobnym rozważaniom, kwestie te będą lepiej zrozumiane w przyszłości i ostatecznie rozwiązane. Analityczna teoria liczb pierwszych jest w tej chwili bardzo żywym obszarem badań, w którym swoich sił próbuje wielu spośród najznakomitszych matematyków naszych czasów. W ciągu ostatnich lat odkrytych zostało wiele interesujących technik wartych dalszych badań, a także wiele nowych z pewnością zostanie wkrótce poznanych.