

## Metody słabej zbieżności dla równań fizyki i biologii matematycznej Popularnonaukowy opis badań

Do opisu wielu istotnych fizycznych lub biologicznych zjawisk stosuje się aparat matematyczny w postaci układów równań różniczkowych cząstkowych. Często są to tzw. prawa zachowania lub prawa bilansu, których przykładami są przepływy płynów (cieczy lub gazów), odkształcenia materiałów sprężystych, wzrost i podział komórkowy i wiele innych. Wspólną cechą takich układów równań jest to, że zawierają wyrażenia nieliniowe, których obecność stanowi jedną z podstawowych trudności w ich matematycznej analizie. Niewiele zjawisk da się opisać prostym liniowym układem. Jednym z priorytetów i wyzwań dla matematyków zajmujących się równaniami różniczkowymi cząstkowymi (a w szczególności równaniami pochodzącymi z fizyki, inżynierii czy biologii) jest zatem rozwijanie metod słabej zbieżności dla równań nieliniowych.

Metody i narzędzia słabej zbieżności (takie jak rozwiązania miarowe, miary Younga czy skompensowana zwartość) dla równań nieliniowych to jeden z dominujących nurtów współczesnej analizy. Przygotowywana przez wnioskodawcę rozprawa doktorska dotyczy dwóch powiązanych ze sobą zagadnień – zasady zachowania energii/entropii dla równań opisujących fizyczne układy (w szczególności równań mechaniki ośrodków ciągłych, w tym płynów) oraz zastosowania tzw. metody relatywnych entropii w badaniu równań różniczkowych cząstkowych. Oba te zagadnienia stanowią fronty aktywnych badań specjalistów w dziedzinie analizy matematycznej na całym świecie. Oba są ciekawe nie tylko ze względów abstrakcyjnej matematyki, ale również zastosowań w fizyce i innych naukach ścisłych. Jednym z podstawowych celów społecznych przygotowywanej rozprawy jest zatem formułowanie i dowodzenie precyzyjnych matematycznie twierdzeń, ale również zapewnienie i wyjaśnienie, że znajdują one zastosowanie w dziedzinie fizyki matematycznej oraz biologii matematycznej.

W ramach zaplanowanego w projekcie stażu badawczego zajmiemy się modelami przepływu roztworów polimerowych, w szczególności w przypadku gdy są one opisywane jako sprężyste hantle o potencjale liniowym (*Hookean dumbbell model*). Jest to układ równań cząstkowych pochodzący z kinetycznej teorii rozcieńczonych polimerów i składa się z równania typu Naviera–Stokesa na prędkość i ciśnienie płynu, z dodatkowym tensorem naprężeń wynikającym z interakcji cząsteczek polimeru z płynem, oraz równania Fokkera–Plancka. Pomimo prostego liniowego potencjału model ten okazuje się niezwykle trudny w analizie – dopiero niedawno wykazane zostało istnienie globalnych słabych rozwiązań, i to tylko w dwóch wymiarach przestrzennych. Ze względu na zasadnicze trudności z rozszerzeniem tego rezultatu, w przypadku trójwymiarowym zajmiemy się rozwiązaniami miarowymi.

Badania nad miarowymi rozwiązaniami wspomnianego układu są dla wnioskodawcy interesujące z dwóch powodów. Po pierwsze, w świetle braku wyników o istnieniu słabych rozwiązań istotne jest zapewnienie istnienia rozwiązań choćby w słabszym sensie. Po drugie, nowością będzie rozważanie takich rozwiązań dla modelu o mieszanym charakterze mikro–makroskopowym – prędkość oraz ciśnienie płynu opisane są równaniem makroskopowym, podczas gdy funkcja gęstości prawdopodobieństwa układu cząsteczek w płynie jest opisana równaniem mikroskopowym. Większość współczesnych badań nad rozwiązaniami miarowymi dotyczy modeli w pełni makroskopowych (np. równań mechaniki płynów, czy hiperbolicznych praw zachowania), co sprawia, że badania zaplanowane na czas stażu wnioskodawcy mogą stać się ciekawym i nowatorskim wkładem w teorię rozwiązań miarowych.