

Nieliniowe formy całkowe związane ze skokowymi procesami Markowa

Tematyka projektu leży na pograniczu teorii procesów stochastycznych, analizy harmoniczej i równań różniczkowych cząstkowych. Będziemy używać metod probabilistycznych do rozwiązywania nielokalnych zagadnień Dirichleta i do badania regularności typu Sobolewa dla rozwiązań. Dla procesów dyfuzji, którym odpowiadają lokalne operatory różniczkowe, teoria ta jest już klasyczna, natomiast dla procesów Lévy'ego i ich nielokalnych generatorów jest ona dopiero rozwijana. W artykułach Kassmanna, Ros-Otona, Vasqueza i in., w celu poprawnego postawienia problemu Dirichleta na obszarze D i szukania jego rozwiązań w przestrzeniach pokrewnych przestrzeni L^2 , wypracowano metodę używającą form dwuliniowych (Dirichleta) o zawężonym obszarze całkowania, oznaczanych przez \mathcal{E}^D (zbiór $D^c \times D^c$ zostaje usunięty). W niedawnej pracy Bogdana, Grzywnego, Pietruskiej-Pałuby i Rutkowskiego otrzymano precyzyjne warunki na istnienie rozwiązania, wyrażone jako twierdzenie o rozszerzaniu i śladzie. Otrzymano w niej również całkową tożsamość Douglasa, która wiąże \mathcal{E}^D –energię rozwiązania z pewną energią typu Sobolewa dla warunku Dirichleta.

W bieżącym projekcie planujemy rozszerzyć tę teorię (istnienie rozwiązań, twierdzenie o rozszerzaniu i o śladzie) na przypadek $p > 1$, być może również $p = 1$. W tym celu systematycznie wprowadzimy, a następnie przeanalizujemy nieliniowe odpowiedniki formy Dirichleta \mathcal{E}^D , o tradycyjnym lub zawężonym obszarze całkowania. Dla form tych będziemy używać oznaczeń \mathcal{E}_p , \mathcal{E}_p^D .

Roważane przez nas całkowe formy nieliniowe sporadycznie pojawiały się w literaturze dotyczącej półgrup Markowa w L^p i ich generatorów; spodziewamy się, że wyniki naszego projektu pozwolą lepiej zrozumieć takie formy dla skokowych procesów Lévy'ego. W szczególności wykażemy tożsamość typu Douglasa dla \mathcal{E}_p^D –energii. Konsekwencją tej tożsamości będą twierdzenia o rozszerzaniu i o śladzie, gdy $p > 2$, dla geometrycznie regularnych zbiorów D . Podamy też ich zastosowania do nielokalnych, nieliniowych równań różniczkowych typu równania ośrodków porowatych.

Ponadto zajmieni się nierównościami typu Hardy'ego dla \mathcal{E}_p^D –energii oraz otrzymamy nowe wyniki w teorii Littlewooda-Paley-Steina dla półgrup Markowa, w tym tożsamości Hardy'ego-Steina.