Optymalne nierówności koncentracyjne

Popularnonaukowe streszczenie projektu

Piotr Nayar

Już starożytni Grecy zadali sobie następujące pytanie: jaki kształt o ustalonym obwodzie, narysowany na płaszczyźnie, ma największe pole powierzchni? Wiedzieli oni o tym, że odpowiedzią jest koło, ale nie dysponowali formalizmem, który pozwoliłby im to wykazać. Poprawny dowód został podany dopiero w XIX wieku. Cele niniejszego projektu są ściśle związane z powyższym problemem i dotyczą tzw. zjawiska koncentracji miary. Najprostszy przypadek, w którym to zjawisko występuje, dotyczy sfery jednostkowej w n-wymiarowej przestrzeni euklidesowej, czyli zbioru punktów leżących w odległości 1 od ustalonego punktu. Rozważmy podzbiór A sfery, który zajmuje dokładnie połowę jej powierzchni (przykładem takiego zbioru jest półsfera) i popatrzmy na zbiór A_+ złożony z punktów na sferze odległych o nie więcej niż 10^{-6} od zbioru A. Można by pomyśleć, że zbiór A_+ niewiele różni się od zbioru A, gdyż cała sfera ma średnicę 2. Okazuje się jednak, że dla dużych n zbiór A_+ zajmuje ponad 99% jej powierzchni. Jest to efekt wysokowymiarowy i trudny do wyobrażenia.

Niniejszy projekt dotyczy koncentracji miary dla zbiorów wypukłych w przestrzeniach euklidesowych. Zamiast sfery rozważamy dowolny zbiór wypukły K i jego podzbiór A, którego objętość równa jest połowie objętości zbioru K. Fundamentalnym pytaniem w geometrii zbiorów wypukłych jest pytanie o rozmiar zbioru A_t punktów z K znajdujących się w odległości nie większej niż t od zbioru A. Problem ten ma ważne zastosowania dotyczące algorytmów liczących objętości zbiorów wypukłych, ale ma też istotne znaczenie teoretyczne. Szczególnie wartościowe, z punktu widzenia teorii, jest uzyskanie dokładnych oszacowań objętości zbioru A_t. My zajmować się będziemy tzw. optymalnymi nierównościami koncentracyjnymi, gdzie definicja zbioru A_t jest nieco zmodyfikowana (sposób, w jaki liczymy odległości między punktami, zależy od rozważanego zbioru wypukłego K). Mówiąc nieściśle, rozważane przez na oszacowania są w pewnym sensie najsilniejszymi możliwymi nierównościami koncentracyjnymi, jakie może spełniać dana miara. Naszym celem jest uzyskanie wyników możliwie jak najbliższych tym optymalnym oszacowaniom.

Rozważane przez nas zagadnienia są ściśle związane z centralnymi hipotezami geometrii zbiorów wypukłych. Wierzymy, że prowadzone przez nas badania przyczynią się do lepszego zrozumienia zjawisk zachodzących w przestrzeniach wysokiego wymiaru.