Celem nauki jest zrozumienie i opisanie jak najdokładniej otaczającego nas świata. Aby osiągnąć ten cel, naukowcy konstruują teoretyczne modele rozważanych zjawisk, testują je eksperymentalnie i teoretycznie, dostosowują je i oceniają prawdopodobieństwa przyszłych możliwych zdarzeń. Podstawowym językiem nauki jest język matematyczny, którym rządzi ścisła logika i inspirująca intuicja. Opiera się na liczbach, wektorach, tensorach, funkcjach i ogromnej liczbie znacznie bardziej złożonych abstrakcyjnych pojęć i narzędzi. Język matematyczny, jak każdy inny język, jest żywą substancją, która nie pozostaje niezmieniona. Ciągle się rozwija i wzbogaca o nowe narzędzia, pomysły, techniki i teorie, a jednym z najnowszych potężnych wynalazków w matematyce jest *teoria macierzy losowych* i *teoria grafów losowych*.

Macierz losowa jest to macierz, której elementy są zmiennymi przyjmującymi różne wartości w zależności od wyników zdarzeń losowych. Badanie losowych macierzy wyłoniło się z różnych zastosowań. Najpierw zostały one wprowadzone w statystyce wysokowymiarowej przez Johna Wisharta do analizy statystycznej dużych próbek. Następnie John von Neumann i Herman Goldstine użyli je do opisania błędów obliczeniowych. Niezależnie od tego Eugene Wigner wpadł na pomysł wykorzystania symetrycznych macierzy losowych jako modeli statystycznych dla ciężkich jąder. W dzisiejszych czasach teoria matryc losowych ma ogromną liczbę różnych ważnych zastosowań w kompletnie różnych dziedzinach, takich jak fizyka jądrowa, chaologia kwantowa, materia skondensowana, fizyka statystyczna, teoria informacji kwantowej, finanse kwantowe i telekomunikacja, aby wymienić tylko kilka.

Wyjaśnienie takiej popularności losowych macierzy jest proste, ponieważ wiele rzeczy w świecie rzeczywistym jest opisany w kategoriach operatorów lub macierzy (np. hamiltoniany). I ilekroć widzimy macierz, której właściwości nie znamy, staramy się myśleć o typowej właściwości i wprowadzić losową macierz posiadającą tę typową właściwość. Mamy nadzieję, że ten model pozwoli przewidzieć inne właściwości zjawiska, które chcemy opisać. Taka kombinacja typowości i "czarnej skrzynki" jest ogólnie stosowanym podejściem probabilistycznym.

Najważniejsze informacje o macierzach losowych zawarte są w asymptotycznych i nieasymptotycznych właściwościach ich wartości własnych, wartości osobliwych, wektorów własnych i wektorów osobliwych, gdy wymiary macierzy dążą do nieskończoności. Na przykład, wartości własne modelu używanego przez Wignera odpowiadają poziomom energetycznym ciężkich jąder. Innym przykładem są wartości osobliwe macierzy losowych z niezależnymi elementami. Największe i najmniejsze wartości osobliwe są szczególnie ważne, zostały intensywnie zbadane, częściowo ze względu na zastosowania w informatyce teoretycznej. Von Neumann i Goldstine, motywowani pracą nad pierwszym elektronicznym komputerem, szukali górnych granic dla tak zwanego *wskaźnika uwarunkowania*, który jest stosunkiem maksymalnej wartości osobliwej do minimalnej. Wskaźnik uwarunkowania określa stopień wrażliwości rozwiązania układu równań liniowych na perturbacje danych wejściowych i błędów zaokrąglania. Niedawno wskaźniki uwarunkowania dla niewyśrodkowanych macierzy losowych znalazły swoje zastosowania w teorii wygładzonej analizy algorytmów opracowanej przez Spielmana i Tenga. Najmniejsza wartość osobliwa również zyskała na uwadze ze względu na jej związek ze zbieżnością empirycznego widmowego rozkładu macierzy.

W tym projekcie mamy do czynienia z różnymi typami macierzy losowych: Hermitowskimi i nie-Hermitowskimi, rzadkimi i nierzadkimi, mającymi niezależne lub słabo zależne elementy. Interesują nas głównie oszacowania ilościowe dla najmniejszych wartości osobliwych tych macierzy, właściwości delokalizacji wektorów własnych i wektorów osobliwych, zbieżność empirycznych rozkładów widmowych oraz ustalenie asymptotycznej normalności liniowych statystyk wartości własnych. Oczekujemy, że nasze badania będą miały znaczny wpływ na postępy teorii macierzy losowych i jej zastosowań. Problemy opisane w niniejszym wniosku mają pochodzenie lub mają zastosowanie w statystyce, fizyce, teorii informacji kwantowej, analizie numerycznej i teorii grafów losowych. W szczególności, ostre oszacowania najmniejszej wartości liczby osobliwej natychmiast dają lepsze granice dla wskaźnika uwarunkowania macierzy, który z kolei jest kluczowym parametrem w analizie różnych algorytmów numerycznych. Ogólnie biorąc, wierzymy, że projekt ten może nie tylko rozwinąć podstawową wiedzę na temat losowych macierzy i losowych grafów, ale także przynieść korzyści społeczeństwu poprzez ulepszenie teoretycznych podstaw rozwoju technologii informatycznych i oprogramowania komputerowego zajmującego się przetwarzaniem danych.