POPULARNE STRESZCZENIE: **Rozmaitości abelowe i działania grup Galois**

WPROWADZENIE

Proponujemy projekt badania arytmetycznych i algebraicznych własności rozmaitości abelowych zdefiniowanych nad ciałami liczbowymi lub nad ciałami skończenie generowanymi charakterystyki zero. Rozmaitości abelowe są intensywnie badane w teorii liczb i arytmetyce. W naturalny sposób pojawiają się w teorii równań diofantycznych jako krzywe eliptyczne i w geometrii algebraicznej jako rozmaitości Jacobiego krzywych, w teorii reprezentacji grup Galois i w wielu innych działach matematyki współczesnej. Ich własności mają różnorodne zastosowania: od problemów czysto matematycznych teorii liczb, przez teorię krzywych algebraicznych, aż po teoriię funkcji theta zastosowaną w fizyce.

CEL PROJEKTU

(1) Hipoteza Mumforda-Tate'a dla rozmaitości abelowych

Nasze badania będą dwojakiego rodzaju: pierwsza część (oparta na teorii grup skończonych) jest prawdopodobnie łatwiejsza, natomiast druga (oparta na metodach przestępnych) stanowi dłuższy projekt, nakierowany na uzyskanie głębszych i trudniejszych w dowodzie rezultatów. Ta tematyka jest dzisiaj nadal zdominowana przez wyniki Serre'a i przez hipotezę Mumforda-Tate'a blisko związaną z dwoma sławnymi hipotezami: hipotezą Hodge'a i z hipotezą Tate'a. Pierwszy przejaw tego związku jest następujący: grupa Hodge'a lub grupa Mumforda-Tate'a oraz grupy monodromii Galois zawierają się w podgrupie symplektycznej macierzy przemiennych z endomorfizmami. Spróbujemy dowieść hipotezy Mumforda-Tate'a dla nowych klas rozmaitości abelowych, wykorzystując ideę Ribeta, ostatnio ponownie odkrytą przez C.Halla. Zakładając, że rozmaitość ma złą semi-stabilną redukcję zadanego typu, uzyskamy dodatkową informację o działaniu grupy Galois. Chcemy spróbować tej idei do nowych klas rozmaitości abelowych z redukcją toryczną dowolnego typu i do pewnych klas rozmaitości abelowych wymiaru cztery. Drugie podejście, które proponujemy w tej części projektu jest oparte na naturalnym pomyśle, że w rodzinie rozmaitości abelowych, parametryzowanych punktami rozmaitości Shimury, "generyczny punkt" spelnia hipotezę Mumforda-Tate'a i, jeśli dla pewnej rozmaitości z rodziny, grupa Galois byłaby znacznie mniejsza, to powodowałoby to istnienie pewnego dodatkowego cyklu algebraicznego na pewnej potędze rozważanej rozmaitości.

(2) Własności arytmetyczne rozmaitości abelowych i zgodnych systemów reprezentacji

Z wielu ważnych konsekwencji hipotezy Mumforda-Tate'a w teorii rozmaitości abelowych wspomnimy tutaj tylko hipotezę Murty'ego i Patankar z 2008 roku, która mówi: *Niech A będzie geometrycznie prostą rozmaitością abelową nad ciałem liczbowym K. Oznaczmy przez M zbiór tych miejsc v ciała K, w których A ma dobrą redukcję i rozmaitość zredukowana A_v jest prosta. Wtedy, po ewentualnym zastąpieniu K rozszerzeniem skończonym, zbiór M ma gęstość. Ta gęstość równa się jeden wtedy i tylko wtedy, gdy pierścień endomorfizmów rozmaitości A jest przemienny.* Zywina dowiódł niedawno istnienia związku hipotezy Murty'ego i Patankara z hipotezą Mumforda-Tate'a. Twierdzenie Zywiny uogólnia wcześniej uzyskane rezultaty Chai-Oorta, Murty-Patankara i Jeffa Achtera. W naszym projekcie zamierzamy dowieść (bezwarunkowych) odpowiedników tych rezulatów dla ciał dodatniej charakterystyki. Ponadto, zamierzamy kontynuować badania: *grup monodromii, twierdzeń o otwartym obrazie dla adeli* i *problemu odwrotnego dla systemów reprezentacji.*

WPŁYW PROJEKTU

Najważniejszym owocem proponowanych badań będą rezultaty (twierdzenia, przykłady i kontrprzykłady) uzyskane w tym projekcie. Te wyniki niewątpliwie przyczynią się do rozwoju nauki oraz zostaną złożone w formie publikacji do wiodących czasopism matematycznych. Będą przedstawiane na konferencjach międzynarodowych i na seminariach naukowych.