

Fundamentalnym równaniem opisującym nierelatywistyczną materię w skali mikroskopowej jest wielociałowe równanie Schrödingera. To *liniowe* równanie opisuje nie tylko molekuly czy atomy lecz również układy składające się ze znacznie większej liczby cząsteczek, takie jak np. gazy bozonów. Te ostatnie, używane w eksperymentach, składać się mogą nawet z tysięcy cząsteczek. W takiej sytuacji rozwiązanie równania Schrödingera jest niemożliwe: zarówno z punktu widzenia rozwiązań ścisłych jak i numerycznych. Do opisu badanych układów używa się wtedy teorii efektywnych, które posiadają znacznie mniejszą liczbę stopni swobody, ale często są *nieliniowe*. Celem niniejszego projektu badawczego jest matematyczne uzasadnienie pewnych efektywnych teorii używanych w mechanice kwantowej wielu ciał.

Problemy którymi będziemy się zajmować w ramach tego projektu podzielić można na dwie grupy. Pierwsza z nich dotyczy analizy dynamiki kwantowej dużych układów oddziałujących bozonów. Jedną z najbardziej charakterystycznych cech układów bozonów jest ich zdolności do kondensacji. Zjawisko kondensacji Bosego–Einsteina - bo o nim mowa - polega na tym, że w dostatecznie niskiej temperaturze większość cząsteczek znajduje się w tym samym stanie kwantowym. Zjawisko to zostało przewidziane przez Bosego i Einsteina w 1924 roku, zaś eksperymentalną realizację tego nowego stanu skupienia materii osiągnięto w 1995 roku, za co zresztą Cornell, Ketterle i Wieman dostali w 2001 roku nagrodę Nobla. Od tego czasu, udowodnienie istnienia kondensacji Bosego–Einsteina w układach oddziałujących (Bose i Einstein przewidzieli to zjawisko w wyidealizowanym modelu nieoddziałujących bozonów), wychodząc od mikroskopowych praw mechaniki kwantowej, stało się jednym z podstawowych problemów fizyki matematycznej. Heurystycznie, gdy oddziaływanie między cząsteczkami jest słabe, sensownym jest założyć, że cząsteczki są niezależne, ale za to w pewnym uśrednionym, samouzgodnionym zewnętrznym potencjale. Takie założenie prowadzi do teorii Hartree’go/Grossa–Pitaevskiego, która przewiduje własności układu oddziałujących bozonów w pierwszym przybliżeniu. Nas interesować będzie dokładniejsze zrozumienie układu oddziałujących bozonów. Heurystycznie odpowiedź na to pytanie dana jest przez teorię Bogoliubowa, wedle której cząsteczki nie są już (prawie) niezależne i uwzględnić należy korelacje między nimi. Celem pierwszej części tego projektu będzie matematyczne uzasadnienie poprawności przybliżenia Bogoliubowa dla różnych, fizycznie istotnych modeli.

Celem drugiej części projektu będzie zbadanie układów oddziałujących bozonów w granicy termodynamicznej. W szczególności, planujemy zająć się zjawiskiem spontanicznego łamania symetrii w takich układach. Spontaniczne łamanie symetrii jest jednym z kluczowych pojęć współczesnej fizyki teoretycznej. Heurystycznie rzecz ujmując, ze spontanicznym łamaniem symetrii mamy do czynienia w sytuacji, gdy końcowy stan układu fizycznego nie posiada tych samych symetrii co stan początkowy. Łamanie symetrii pojawia się w wielu dziedzinach fizyki: od materii skondensowanej po fizykę wysokich energii. Istnieje niewiele ścisłych matematycznie wyników opisujących to zjawisko. W naszym projekcie mamy zamiar udowodnić łamanie symetrii w układzie oddziałujących bozonów.