Rozwiązania słabe i miarowe dla równań fizyki matematycznej

Uważa sie, że wiele istotnych fizycznych zjawisk jest dobrze opisanych przez układy nieliniowych równań różniczkowych cząstkowych (są to *prawa zachowania* lub *prawa bilansu*) – za przykłady mogą służyć przepływy cieczy czy zachowanie materiałów elastycznych. Jednakże, mimo praktycznego znaczenia tych zagadnień oraz niezłomnych wysiłków pokoleń matematyków, ogólna teoria globalnego istnienia rozwiązań dla wielu nieliniowych układów pozostaje szeroko otwarta.

Podstawowe równania mechaniki cieczy zostały sformułowane dość dawno temu – 250 lat temu przez Eulera i 150 lat temu przez Naviera i Stokesa – a wciąż istnienie rozwiązań w przypadku trójwymiarowym wiadome jest jedynie w uogólnionym sensie, a jednoznaczność nie może być zagwarantowana. Co gorsze, ostatnie wyniki De Lellisa i Székelyhidiego pokazują, że dla dużej klasy warunków początkowych możliwe jest skonstruowanie nieskończonej liczby rozwiązań dla nieściśliwego układu Eulera. Rozwiązania te są bezsensowne z punktu widzenia fizyki – na przykład mogą generować i gubić energię w niemal dowolny zadany sposób. Przez długi czas uważano, że możliwe jest zagwarantowanie jednoznaczności poprzez wybranie tego fizycznie odpowiedniego rozwiązania, które spełnia dodatkowy *warunek dopuszczalności* (np. nierówność energetyczną). Niestety, przykłady wygenerowane metodą *wypukłego całkowania* pokazują, że te nadzieje są płonne.

Niedobór teorii globalnego dobrego postawienia dotyczy również płynów ściśliwych, nieliniowej elastyczności, oraz ogólnych układów praw zachowania. Klasycznie wiadomo, że rozwiązania takich układów stają się nieciągłe, nawet dla gładkich danych początkowych – prowadzi to do utraty informacji, trudnej do określenia ilościowo. Niewiele wiadomo o ściśliwym przepływie po czasie, w którym powstała nieciągłość. Słynny matematyk Peter D. Lax nazwał to "naukowym skandalem i wyzwaniem".

Brak pozytywnych wyników dotyczących istnienia i jednoznaczności rozwiązań oraz przykłady na brak jednoznaczności nawet w klasie dopuszczalnych rozwiązań motywują szukanie nowego paradygmatu rozwiązania dla nieliniowych układów fizycznych równań różniczkowych. Jedną z możliwości jest rozważanie rozwiązań *miarowych*, tzn. pozwolenie by rozwiązanie było słabszym niż całkowalna funkcja obiektem (miarą). Dla wielu szczególnych przypadków pokazano, że takie pojęcie rozwiązania jest dostatecznie szerokie, aby umożliwić globalną teorię istnienia.

W niniejszym projekcie będziemy badać ważne z fizycznego punktu widzenia własności rozwiązań słabych oraz miarowych zarówno dla szczególnych układów (ściśliwe równania Eulera, poliwypukła elastyczność, równania Eulera–Kortewega) – gdzie możliwe jest wykorzystanie specyficznej dodatkowej struktury – jak i dla ogólnych praw zachowania i bilansu. W szczególności zajmiemy się zagadniniami zachowania energii oraz entropii dla słabych rozwiązań oraz własnością miarowo–mocnej jednoznaczności. Badania w tej pierwszej tematyce skupimy na poszukiwaniu minimalnych założeń o regularności, które pozwolą zagwarantować, że słabe rozwiązanie będzie zachowywać całkowitą energię układu. Drugie z zagadnień to własność warunkowej jednoznaczności, gwarantująca, że (zazwyczaj bardzo niejednoznaczne) rozwiązania miarowe stają się jednoznaczne w obecności klasycznego rozwiązania o tych samych danych początkowych.