Projekt porusza centralne problemy geometrii algebraicznej, dziedziny matematyki, która zajmuje się badaniem zbiorów rozwiązań układów równań wielomianowych zwanych rozmaitościami algebraicznymi. Taki kontekst jest wystarczająco specjalny by można było używać narzędzi z innych dziedzin matematyki takich jak algebra, analiza, teoria liczb czy równania różniczkowe, jednocześnie jest na tyle ogólny, że służy do modelowania problemów nie tylko z innych dziedzin matematyki, ale również fizyki teoretycznej. Wiodącym problemem geometrii algebraicznej jest problem klasyfikacji rozmaitości algebraicznych. Jednak, rozmaitości algebraiczne tworzą tak szeroką i różnorodną klasę obiektów, że nie ma nadziei na opisanie ich wszystkich. Zamiast tego rozważa się specjalne klasy rozmaitości, które są ważne z różnych powodów. Wśród najważniejszych rozmaitości algebraicznych znajdują się tzw. rozmaitości typu Calabi–Yau, które wyróżniają się tym, że posiadają nieznikającą formę objętości. Ich ważność dla geometrii algebraicznej wynika z miejsca jakie zajmują w klasyfikacji wszystkich rozmaitości; na granicy pomiędzy lepiej zrozumianym światem rozmaitości hipotetycznie pokrytych krzywymi wymiernymi oraz rozmaitości ogólnego typu dla których nie ma nadziei na ich ogólne opisanie. Klasyfikacja rozmaitości typu Calabi–Yau w wymiarach począwszy od trzy jest jednym z największych wyzwań geometrii algebraicznej. Jednak, znaczenie rozmaitości typu Calabi–Yau znacznie wybiega ponad problem klasyfikacji. Jako bardzo naturalne obiekty pojawiają się one w innych dziedzinach matematyki jak również w fizyce teoretycznej. Rozmaitości typu Calabi–Yau zbudowane z trzech typów obiektów: rozmaitości Calabi–Yau, rozmaitości hiperkahlerowskich oraz torusów. Nasz projekt zajmuje się badaniem dwóch pierwszych wymienionych rodzajów rozmaitości.

Jednym z głównych motorów rozwoju teorii rozmaitości Calabi–Yau jest rola jaką pełnią w fizycznej teorii strun jako obiekty modelujące wszechświat. W skrócie, teoria strun postuluje, że wszechświat rozwłókniony jest malutkimi sześcio-wymiarowymi rozmaitościami Calabi–Yau wewnątrz których znajdują się wibrujące struny. Zachowanie struny na rozmaitości Calabi–Yau determinuje cząsteczkę jaką w tym miejscu obserwujemy. Z tego powodu zrozumienie rozmaitości Calabi–Yau jest kluczowe dla zrozumienia modelu wszechświata opartego na teorii strun. Teorie rozmaitości Calabi–Yau oraz teorii strun rozwijają się równolegle dzięki temu ta pierwsza jest pełna hipotez które motywowane są ich znaczeniem w fizyce. Najsławniejszą taką hipotezą jest hipoteza symetrii lustrzanej, która w interpretacji matematycznej postuluje, że rozmaitości Calabi–Yau występują parami które mają zamienione ze sobą pewne swoje struktury. Niektóre wersje hipotezy symetrii lustrzanej zostały udowodnione dla najprostszych rozmaitości Calabi–Yau tzw. pełnych przecięć w rozmaitościach torycznych. Poza tą klasą hipoteza jest całkowicie otwarta i motywuje szukanie nowych niestandardowych przykładów. W świecie rozmaitości Calabi–Yau jest również wiele innych symetrii, które nie są dotąd w pełni zrozumiałe. W szczególności przekraczając pewne ściany w przestrzeni parametrów opisujących tzw teorie GLSM możemy otrzymać rozmaitości, które są różne lecz w pewnym sensie wciąż równoważne. Równoważność ta w terminach matematycznych powinna odpowiadać tzw. dualności Fourier–Mukai i powinna implikować, że rozmaitości te posiadają to samo lustro. Ponadto, oczekujemy, że rozmaitości te muszą również być topologicznie powiązane przez tzw. $\mathbb{L}$–równoważność. Jako, że teoria GLSM odegrała ważną rolę w dowodzie symetrii lustrzanej dla pełnych przecięć w rozmaitościach torycznych spodziewamy się, że zrozumienie tych fenomenów może przyczynić się do lepszego zrozumienia symetrii lustrzanej w ogólności. Jednym z naszych celów jest stworzenie naturalnego kontekstu do konstrukcji rozmaitości Calabi–Yau powiązanych z teoria GLSM i badanie przejść przez ścianę w celu częściowego udowodnienia opisanych hipotez.

Rozmaitości hiperkahlerowskie natomiast są jednymi z najbardziej tajemniczych rozmaitości. Są one bardzo specjalne i trudne do skonstruowania, tak trudne, że pojawił się swego czasu w literaturze (fałszywy) dowód tego, że takie rozmaitości nie mogą istnieć w zespolonym wymiarze wyższym niż 2. Dzisiaj znamy cztery rodzaje takich rozmaitości lecz nawet wśród tych rodzajów skonstruowanie wystarczająco ogólnych przykładów jest dużym wyzwaniem. Znanych jest zaledwie sześć takich konstrukcji i każda z nich wiąże się z głęboką i piękną geometrią. Wszystkie te konstrukcje dotyczą jednak rozmaitości tego samego typu, tzw. typu $K3^{[n]}$. Nasz projekt zajmuje się między innymi konstruowaniem rozmaitości, które nie są typu $K3^{[n]}$. Rozmaitości hiperkahlerowskie są również bardzo naturalnymi obiektami i jako takie są powiązane w często zaskakujący sposób z problemami pozornie z nimi nie związanymi. Dlatego w projekcie badamy również geometrię i inne własności nowych i już znanych rozmaitości z różnych punktów widzenia.