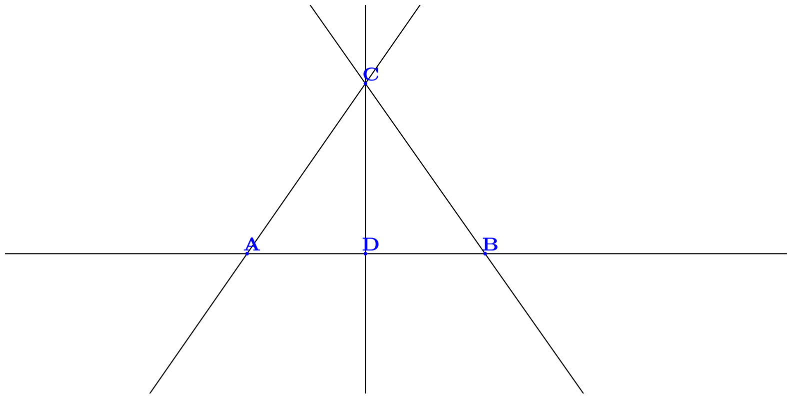
Krzywe osobliwe na powierzchniach algebraicznych
Popularnonaukowe streszczenie projektu

W projekcie będziemy rozważać konfiguracje krzywych, zacznijmy jednak od najprostszego przypadku, czyli od prostych. Proste te mogą się przecinać wzajemnie w pewnych punktach, część z nich to podwójne punkty przecięcia, czyli takie w których dwie proste się spotykają, część z nich są punktami potrójnymi, i tak dalej. Zbiór wszystkich punktów przecięcia nazywamy zbiorem punktów osobliwych, a zbiór prostych będziemy nazywać konfiguracją prostych.

Dla takiej konfiguracji prostych można policzyć liczbę samoprzecięć c w następujący sposób – wyznaczamy liczbę prostych przechodzących przez dany punkt, liczbę tę podnosimy do kwadratu, a następnie sumujemy po wszystkich punktach ze zbioru punktów osobliwych. Weźmy, dla przykładu, konfigurację czterech prostych o czterach punktach przecięcia A, B, C, D, przy czym, A, B, D to punkty podwójne i C jest punktem potrójnym, liczba c wynosi $2^2 + 2^2 + 2^2 + 3^2 = 21$.



Dla nas istotna będzie trochę inna liczba, tj. odjemujemy liczbę c od kwadratu liczby prostych d wchodzących w skład konfiguracji. Nasza liczba $d^2 - c$ może być dodatnia, równa zero, ale również może być ujemna. W naszym przykładzie czterech prostych uzyskujemy $4^2 - 21 = -5$. Dość łatwo można znaleźć konfiguracje prostych dla których liczba $d^2 - c$ jest dowolnie duża, bardzo ujemna, albo bliska zeru, zatem interesującym pytaniem jest co się wydarzy gdy liczbę $d^2 - c$ podzielimy przez liczbę punktów osobliwych n. W przykładzie powyżej uzyskamy $(d^2 - c)/n = -5/4$. Naszym zadaniem, które sobie stawiamy, jest znalezienie takiej konfiguracji prostych $\mathcal{L}$ dla których liczba $H(\mathcal{L}) = \frac{d^2-c}{n}$ jest najbardziej ujemna. Jest to problem otwarty, tj. nie wiemy jaka jest minimalna wartość $H(\mathcal{L})$, ale z drugiej strony wiemy, że liczba ta musi być większa od -4 (zobacz [1, Theorem 3.3]). Takiego typu pytania znajdują się w głównym nurcie zainteresowań geometrów algebraicznych zajmujących się teorią powierzchni. Mówiąc ogólniej, w tym projekcie badamy nie tylko konfiguracje prostych, bowiem będziemy chcieli znaleźć szacowania dolne na liczbę $H(\mathcal{C})$ dla dowolnej konfiguracji krzywych $\mathcal{C}$ na płaszczyźnie (i nie tylko). Dla przykładu, taką konfiguracją krzywych może być układ okręgu i prostej, która przecina ten okrąg w 2 punktach. Ponieważ liczby c i n mogą być rozumiane w ten sam sposób jak w przypadku konfiguracji prostych, jedyną rzeczą do zdefiniowania jest uogólnienie liczby d – tak zwanego stopnia konfiguracji $\mathcal{C}$. W naszym przypadku ten stopień jest równy 3, bowiem 1 to stopień prostej a 2 to stopień okręgu. Teraz możemy policzyć liczbę $H(\mathcal{C})$, która jest równa $\Bigg(3^2 - (2^2 + 2^2)\Bigg)/2 = 0.5$. Tak jak w przypadku konfiguracji prostych, nie wiemy jak bardzo ujemna może być wartość $H(\mathcal{C})$ dla konfiguracji prostych i stożkowych $\mathcal{C}$ - jest to jeden z głównych punktów naszego zainteresowania.

Problem znajdowania konfiguracji $\mathcal{C}$ o ujemnych wartościach $H(\mathcal{C})$ sformułowany powyżej jest bardzo ściśle związany z tzw. Hipotezą o ograniczonych samoprzecięciach krzywych [2], która to jest bardzo intrygującym i nierozwiązanym problemem od kilkudziesięciu lat. W tym projekcie będziemy chcieli zbadać powyższą hipotezę w jak najogólniejszym przypadku konfiguracji krzywych na powierzchniach algebraicznych. Ponadto, będziemy chcieli zbadać konfiguracje krzywych z perspektywy otwartych problemów algebry kombinatorycznej, tj. kiedy pewne własności algebraiczne obiektów stowarzyszonych z konfiguracjami są wyznaczone przez własności kombinatoryczne. Tematyka ta jest związana ze słynną hipotezą Terao dla konfiguracji hiperpłaszczyzn w przestrzeniach rzutowych [3].

Literatura

[1] Th. Bauer, S. Di Rocco, B. Harbourne, J. Huizenga, A. Lundman, P. Pokora, and T. Szemberg, Bounded Negativity and Arrangements of Lines, *Int. Math. Res. Not.* **2015**, 9456 – 9471 (2015).

[2] Th. Bauer, B. Harbourne, A. L. Knutsen, A. Küronya, S. Müller–Stach, X. Roulleau, and T. Szemberg, Negative curves on algebraic surfaces, *Duke Math. J.* **162**: 1877 – 1894 (2013).

[3] H. Terao, *The exponents of a free hypersurface.* Singularities, Part 2 (Arcata, Calif., 1981), pp. 561 – 566, Proc. Sympos. Pure Math., 40, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1983.