Normalność, determinizm, punkty generyczne i różne pojęcia nieskorelowania w działaniach półgrup ze średnią

Popularnonaukowe streszczenie projektu

Jeśli w rozwinięciu dziesiętnym liczby x każda z cyfr 0, 1, ..., 9 występuje jednakowo często, to powiemy, że x jest *normalna rzędu 1.* Aby nazwać ją po prostu *liczbą normalną*, musi ona spełniać podobny warunek na występowanie dłuższych bloków cyfr. Wnioskiem z Prawa Wielkich Liczb Bernoulliego jest to, że wśród wszystkich liczb rzeczywistych w przedziale $[0, 1]$ *prawie wszystkie* liczby są normalne (czyli wylosowanie zgodnie z rokładem jednostajnym liczby nie normalnej jest zdarzeniem o prawdopodobieństwie zero). Jednak liczby, z którymi najczęściej spotykamy się na co dzień (liczby wymierne) nie są normalne, a o znanych nam liczbach niewymiernych, takich jak e, π czy $\sqrt{2}$, najczęściej nie wiadomo, czy są normalne i są to zagadnienia niezwykle trudne. Pierwszy konkretny przykład liczby normalnej podał angielski matematyk David Gawen Champernowne. Jest to liczba, której rozwinięcie powstaje na prostej zasadzie zestawiania rozwinięć dziesiętnych kolejnych liczb naturalnych: 0,1234567891011121314...99100101102... Liczby normalne oraz możliwości manipulowania nimi w sposób zachowujący normalność są niezwykle ważne ze względu na liczne zastosowania, chociażby w teorii informacji czy kryptografii. Okazuje się, że jeśli w rozwnięciu liczby normalnej pozostawimy tylko co drugą cyfrę (albo tylko co trzecią, itd.), to znów otrzymamy rozwinięcie liczby normalnej. Idąc dalej w tym kierunku Teturo Kamae postawił na początku lat siedemdziesiątych pytanie o charakteryzację takich rosnących ciągów liczb naturalnych $n_1, n_2, n_3, \ldots$, że *dla każdej* liczby normalnej $x = 0, a_1 a_2 a_3 \ldots$, liczba $y = 0, a_{n_1} a_{n_2} a_{n_3} \ldots$ jest również normalna. (Zauważmy, że jeśli żądać tego warunku tylko dla *prawie każdej* liczby normalnej, to pytanie staje się trywialne: każdy rosnący ciąg liczb naturalnych spełna tak sformułowany warunek.) Odpowiedzi na swoje pytanie udzielił Kamae kilka lat później wspólnie z Benjy Weissem, dowodząć, są to te same ciągi, które spełniają zdefiniowany wcześniej przez Weissa tzw. warunek deterministyczności (termin związany z teorią entropii w układach dynamicznych).

Jeśli ciąg cyfr (gdzie cyfry ułożone są wzłuż jednej linii) zastąpić inną, bardziej "przestrzenną" konfiguracją cyfr (na przykład dwu- trzy- lub nieskończenie-wymiarową siecią) to nadal można sensownie definiować pojęcia normalności, determinizmu oraz "podsieci" zachowującej normalność. Te pojęcia mogą odgrywać rolę w analizie złożonych zjawisk z czasem wielowymiarowych na przykład w teorii sterowania. W naszym projekcie zamierzamy zająć się (między innymi) daleko idącymi uogólnieniami twierdzenia Kamae–Weissa na takie właśnie wielowymiarowe (i jeszcze bardziej abstrakcyjne) przypadki, jak również na przypadki, gdzie pojęcia normalności definiuje się w inny sposób związany na przykład z innymi rozwinięciami liczb rzeczywistych stosowanymi w matematyce i innych działach nauki (jednym z takich rozwinięć jest rozwinięcie w ułamek łańcuchowy). W przypadkach, dla których uda nam się scharakteryzować "podsieci" zachowujące normalność, zamierzamy badać tak zwane Diofantyczne własnośći takich podsieci (przykładem własności Diofantycznej podzbioru A liczb naturalnych jest, że jeśli $x, y \in A$, to również $x + y \in A$). We wcześniejszych pracach udowodniliśmy między innymi, że każdy podzbiór normalny zbioru liczb naturalnych, oprócz dowolnie długich postępów arytmetycznych (co było faktem znanym od dawna), zawiera również dowolnie długie postępy geometryczne. W innych "sieciach" własności Diofantyczne zależą od algebraicznej struktury danej sieci, co powoduje, że najsensowniej jest badać "sieci" o strukturze grupy lub półgrupy. Stąd między innym wynika nasz wybór podany w tytule projektu.

Jesteśmy przekonani, że uzyskane przez nas wyniki zostaną dostrzeżone przez środowisko naukowe i przyczynią się znacząco do rozwoju nauki, w szczególności w dziedzinach z pogranicza teorii układów dynamicznych, algebry i kombinatoryki.