## POPULARNONAUKOWE STRESZCZENIE PROJEKTU

Martyngały tworzą klasę procesów stochastycznych grającą fundamentalną rolę w teorii całki stochastycznej w przypadku dyskretnym i ciągłym. Teoria ta jest podstawowym narzędziem w zastosowaniach, m.in. w modelowaniu stochastycznym i matematyce finansowej, i posiada niebagatelne znaczenie dla innych dziedzin takich jak analiza harmoniczna i analiza funkcjonalna. Z punktu widzenia tych zastosowań, ważnym obiektem badań są oszacowania dla martyngałów i różnych obiektów z nimi powiązanych (np. funkcji maksymalnych czy funkcji kwadratowych). Wyniki tego typu są istotne m.in. z teoretycznych powodów - przykładowo, umożliwiają one użycie twierdzeń granicznych i gwarantują poprawną określoność odpowiednich wielkości. Dział teorii martyngałów, poświęcony badaniu różnych oszacowań, jest odrębną i intensywnie rozwijającą się dziedziną już od prawie stu lat.

Celem projektu jest zbadanie pewnych ważnych klas nierówności martyngałowych w szerszym, nieprzemiennym (niekomutatywnym) kontekście. Przejście do tego kontekstu oznacza w szczególności, iż procesy stochastyczne przestają być traktowane jako losowe struktury, a zamiast tego są postrzegane z bardziej ogólnej perspektywy algebr operatorowych. Ta gałąź teorii martyngałów zanotowała znaczny rozwój w przeciągu ostatnich dwudziestu lat: wiele ważnych klasycznych nierówności zostało uogólnionych na przypadek nieprzemienny. Wyniki te znalazły szereg interesujących zastosowań w innych działach matematyki, m.in. w teorii macierzy losowych, nieprzemiennej analizie harmonicznej, teorii operatorów oraz teorii ergodycznej.

Warto wspomnieć o dwóch ważnych aspektach związanych z rozważaniami w sytuacji nieprzemiennej. Jednym z głównych problemów jest mała liczba technicznych narzędzi, które mogą być używane w badaniach: większość punktowych oszacowań, nawet po obłożeniu śladem, przestaje być prawdziwa po przejściu z klasycznego do niekomutatywnego przypadku. To zaś często uniemożliwia bezpośrednie przeniesienie analizy i wymaga wypracowania nowych metod - w konsekwencji, badania są trudniejsze i bardziej interesujące. Z drugiej strony, przejście do nieprzemiennej sytuacji często ujawnia nieoczekiwane zjawiska, np. pewne wielkości przestają być porównywalne; niektóre klasyczne obiekty dają się rozszerzyć na kilka różnych (sensownych) sposobów; stałe w pewnych oszacowaniach zaczynają zachowywać się w zupełnie inny sposób, odsłaniając ukrytą przeszkodę tkwiącą w teorii operatorów.

Tzw. nierówności maksymalne Dooba w dość przejrzysty sposób ilustrują powyższe kwestie i opiszemy je teraz pokrótce. W klasycznym przypadku, wynik jest następujący. Niech $(f_n)_{n\geq 0}$ będzie martingałem (ciągiem zmiennych losowych posiadającym pewne strukturalne własności) na pewnej przestrzeni probabilistycznej. Związana z nim funkcja maksymalna $f^* = \sup_{n\geq 0} |f_n|$ w sposób oczywisty majoryzuje każdą ze zmiennych $f_n$, $n = 0, 1, 2, \ldots$. Okazuje się, iż ma miejsce następujący wynik w drugą stronę: dla $1 < p < \infty$ istnieje taka stała $c_p$, że

$$(\star) \qquad \left(\mathbb{E}\sup_{n\geq 0} |f_n|^p\right)^{1/p} \leq c_p \left(\sup_{n\geq 0} \mathbb{E}|f_n|^p\right)^{1/p},$$

tzn. rodzina $(f_n)_{n\geq 0}$ kontroluje (w $p$-tej normie) rozmiar funkcji maksymalnej. Przejście do sytuacji nieprzemiennej natychmiast rodzi poważny problem. Mianowicie, dla ustalonego martyngału $(f_n)_{n\geq 0}$ (który teraz staje się rodziną operatorów na pewnej algebrze von Neumanna ze śladem $\tau$) nie jest jasne, w jaki sposób zdefiniować funkcję maksymalną: nie ma sensownej procedury prowadzącej do supremum operatorów. Aby obejść ten problem, wprowadza się wprost "normę supremum martyngału $(f_n)_{n\geq 0}$", tzn. zamiast definiować $\sup_{n\geq 0} |f_n|$, nadaje się odpowiednie nieprzemienne znaczenie lewej stronie $(\star)$. Nie będziemy tu przedstawiać tego rozszerzenia i zadowolimy się następującą przejrzystą wersją nierówności w szczególnym przypadku gdy $(f_n)_{n\geq 0}$ jest dodatni (tzn. składa się z dodatnich operatorów). Mianowicie, dla $1 < p < \infty$ i dodatniego martyngału $(f_n)_{n\geq 0}$, istnieje dodatni operator $a$ taki, że $f_n \leq a$ dla każdego $n$ oraz

$$(\star\star) \qquad \big(\tau(a^p)\big)^{1/p} \leq C_p \left(\sup_{n\geq 0} \tau(f_n^p)\right)^{1/p},$$

dla pewnej stałej $C_p$ zależnej tylko od $p$. Warto tu odnotować iż (optymalne) stałe w $(\star)$ i $(\star\star)$ zachowują się inaczej: gdy $p \to \infty$, mają ten sam rząd $O(1)$, ale z drugiej strony mamy $c_p = O((p-1)^{-1})$ i $C_p = O((p-1)^{-2})$ gdy $p \to 1$. Należy tu także nadmienić, iż o ile dowód $(\star)$ opiera się wyłącznie na pewnych elementarnych oszacowaniach, o tyle argumentacja prowadząca do $(\star\star)$ wykorzystuje głębokie wyniki z teorii interpolacji oraz dualność.

Projekt zakłada badania nad kilkoma klasami nierówności martyngałowych, które są niezwykle istotne z punktu widzenia dalszego rozwoju dziedziny. Obejmują on wersje z wagą powyższych maksymalnych oszacowań, nierówności dla martyngałów z czasem ciągłym, niekomutatywną metodę funkcji Bellmana oraz tzw. rozkłady atomowe.