Streszczenie popularnonaukowe

Grupy są jednymi z najbardziej elementarnych i zarazem najważniejszych obiektów w matematyce i pojawiają się właściwie w każdym problemie matematycznym. Co za tym idzie, są użyteczne w innych dziedzinach nauki: biologii, chemii, fizyce, a ostatnio, coraz bardziej, w informatyce.

Obecny projekt dotyczy badania grup – obiektów a priori algebraicznych – za pomocą metod geometrycznych i teoriomiarowych. To stosunkowo młoda dziedzina badań, która rozwinęła się w ostatnich trzydziestu latach, czerpiąc zagadnienia i narzędzia z, między innymi: geometrii różniczkowej, topologii algebraicznej i kombinatorycznej teorii grup. W dużym przybliżeniu można powiedzieć, że staramy się wyposażyć grupę w pewną strukturę metryczną lub miarową, by potem, z właściwości tej ostatniej, wywnioskować algebraiczne własności samej grupy. Taka strategia jest pięknym przykładem sytuacji kiedy dwa, pozornie niepowiązane podejścia do problemu – geometryczne i algebraiczne – zastosowane wspólnie owocują bardzo silnymi narzędziami. W istocie, spojrzenie na grupy jako na obiekty geometryczne pozwoliło dokonać przełomowych odkryć dotyczących ich struktury, na przykład w przypadku automorfizmów zewnętrznych grup wolnych.

W projekcie koncentrujemy się na kilku ważnych klasach grup. *Grupy Coxetera* to uogólnienie grup symetrii odbiciowych w przestrzeni euklidesowej. Są one bardzo ważnym źródłem przykładów zarówno w teorii grup, jak i, na przykład, w geometrii różniczkowej. *Grupy Artina* to grupy, do których należą na przykład grupy warkoczy, jak i niektóre grupy klas odwzorowań powierzchni. Grupy Artina są badane intensywnie od dłuższego czasu i, hipotetycznie, mają szereg interesujących właściwości, ale bardzo mocno strzegą swoich tajemnic. *Grupy automorfizmów wielomianowych* przestrzeni afinicznej są ważnymi obiektami studiowanymi w geometrii algebraicznej. Ogromny postęp w ich badaniu został niedawno osiągnięty właśnie przy użyciu metod geometrycznej teorii grup. *Grupy hiperboliczne w sensie Gromowa* to ogromna klasa grup zawierająca w sobie wiele klasycznych obiektów badanych wcześniej osobno. Należą do niej, na przykład, zarówno nieprzemienne grupy wolne, jak i grupy podstawowe zamkniętych rozmaitości o ujemnej krzywiźnie.

Wymienione klasy grup będziemy badać pod różnymi kątami. Grupy Coxetera chcemy wyposażyć w strukturę, która pozwoli nam na pokazanie ich *biautomatyczności*. To bardzo silna algorytmiczna własność, mająca wiele algebraicznych konsekwencji i, hipotetycznie, prawdziwa dla grup Coxetera. Udowodnione jest to jednak tylko w nielicznych przypadkach. Spróbujemy również pokazać, że klasyczny *Problem Sprzężoności* jest rozwiązalny w klasie grup Coxetera. Z innej strony, będziemy konstruowali nowe przykłady grup Coxetera o niespotykanych wcześniej własnościach. Dla innych klas grup będziemy starali się dowieść tzw. *Alternatywy Titsa*. To własność, którą mają hipotetycznie wszystkie grupy tzw. niedodatnio zakrzywione. Zostało to jednak udowodnione tylko w bardzo nielicznych szczególnych przypadkach.

Wreszcie, będziemy badać teoriomiarowe własności grup i studiować ich mierzalne działania na przestrzeniach probabilitycznych. Ta część będzie związana z logiką i np. starym problemem Tarskiego dotyczącym kwadratury koła. Zamierzamy wykorzystać metody mierzalnej teorii grup, by podać ogólne warunki wystarczające i konieczne, by dwa mierzalne podzbiory (np. koło i kwadrat) o tej samej mierze były równoważne przez podział ze względu na działanie dyskretnej grupy działającej na przestrzeni, w której te zbiory leżą.