# Rozmaitości i ideały jednorodne z symetriami

popularnonaukowe streszczenie projektu

Symetrie są obecne pod różnymi postaciami w otaczającym nas świecie. Spotykamy się z nimi codziennie. Symetryczne kształty i struktury są uważane za bardziej estetyczne i atrakcyjne.

Symetrie najlepiej można wyrazić w terminach matematycznych. Ich obecność w matematyce jest wszechogarniająca. Zwykle symetryczne obiekty matematyczne cechują się znacznie lepszymi właściwościami niż obiekty, które nie mają symetrii. Są także łatwiejsze do badania ze względu na szerszy warsztat dostępnych metod.

Na przykład, z dwóch wielomianów przedstawionych poniżej

$$9x^2 - 18xy + 9y^2 \quad \text{oraz} \quad 3x^2 - 17xy + 8y^3,$$

ten po lewej stronie jest oczywiście symetryczny i może być zapisany jako

$$9(x-y)^2.$$

Z tego przedstawienie dowiadujemy się natychmiast, że wartość wielomianu jest zero dokładnie wtedy, gdy $x = y$. Wyznaczenie zbioru miejsc zerowych wielomianu po prawej stronie jest znacznie bardziej skomplikowane.

Celem projektu jest badanie symetrii konfiguracji punktów w przestrzeniach rzutowych oraz wielomianów lub, bardziej ogólnie - rodzin wielomianów (zwanych ideałami), które pojawiły się ostatnio w dwóch, pozornie odległych, obszarach geometrii algebraicznej i algebry przemiennej.

Jeden z tych obszarów zajmuje się ideałami wielomianów i skojarzonymi z nimi obiektami pochodnymi zwanymi zwykłymi i symbolicznymi potęgami. Zauważono, że zachodzą pewne ogólne związki zawierania pomiędzy tymi potęgami. Mówiąc dokładniej, jeśli $I$ jest ideałem jednorodnym wielomianów w $N+1$ zmiennych, to zawieranie

$$I^{(m)} \subset I^r$$

zachodzi na pewno dla $m \geqslant Nr$. Z drugiej strony, nie jest znany żaden przykład ideału, dla którego tak silna nierówność byłaby konieczna dla wszystkich $r$. W projekcie będziemy badać własności ideałów, dla których ta nierówność jest bliska optymalnej.

Drugi obszar jest bardzo nowy. Obiektem zainteresowania są obiekty nazwane nieoczekiwanymi hiperpowierzchniami. Na przykład, dobrze znany jest fakt, że przez dwa różne punkty na płaszczyźnie zawsze przechodzi dokladnie jedna prosta. Od 3 ogólnych punktów nie oczekujemy tego, że są współliniowe. W 2016 roku Cook II, Harbourne, Migliore i Nagel odkryli istnienie takich układów punktów, że choć nie spodziewamy się istnienia hiperpłaszczyzn pewnego stopnia przechodzących przez te punkty z zadanymi krotnościami, to jednak takie hiperpłaszczyzny (zwykle tylko jedna) istnieją! Drugim celem projektu jest wyjaśnienie tego zjawiska.

Najbardziej ciekawą częścią projektu jest zbadanie problemu dlaczego te same, lub bardzo podobne, konfiguracje punktów pojawiają się w obu obszarach, mimo, że na pierwszy rzut oka nie widać między nimi związków.

I wreszcie, prowadzenie zaproponowanych badań w miedzynarodowym zespole daje możliwość połączenia doświadczeń wszystkich tworzących go grup, spojrzenia na problemy z rożnych perspektyw i użycia szerokiej gamy metod i narzędzi badawczych. Poza czysto matematycznymi celami, efektem projektu powinno być pogłębienie współpracy międzynarodowej i zwiększenie widoczności polskiej nauki w międzynarodowej społeczności badaczy.