

Układy równań różniczkowych zarówno zwyczajnych jak i cząstkowych są jednym z głównych narzędzi modelowania matematycznego. Potrzebne są do opisu tak odległych zjawisk jak ruch fal na wodzie, rozwój populacji złożonych z drapieżników i ich ofiar, czy ewolucja Wszechświata. Często się jednak zdarza, że układ równań różniczkowych jakiego używamy przy opisie interesującego nas zjawiska jest tak skomplikowany, że nie widać sposobu jak znaleźć choćby najprostsze jego rozwiązanie. Jedną z przyczyn takiego stanu rzeczy może być to, że rozważany układ równań jest zapisany w złych współrzędnych; że stosowna zamiana zmiennych zależnych, bądź niezależnych, bądź i takich i takich, sprowadza układ do postaci, w której znalezienie rozwiązania staje się oczywiste. To spostrzeżenie prowadzi do badań równań różniczkowych niezależnie od współrzędnych. Robi się to w ten sposób, że jako takie same traktuje się wszystkie równania, które do danego równania dają się sprowadzić jakąś określoną klasą transformacji zmiennych. Dla zastosowań jedną z najciekawszych takich klas jest klasa transformacji punktowych, to znaczy takich, które mogą dowolnie mieszać ze sobą zmienne niezależne, ale które nie mogą mieszać tych dwóch rodzajów zmiennych z pochodnymi zmiennej zależnej.

Zadania do wykonania w tym projekcie związane są z pewną klasą układów równań różniczkowych dla jednej funkcji dwóch zmiennych, które są rozważane z dokładnością do transformacji punktowych. Pokażemy, że każdy taki układ jest równoważny pewnej geometrii pięciowymiarowej, nazwanej geometrią para-CR z formą Leviego zdegenerowaną w jednym kierunku. Podamy wszystkie niezmienniki różniczkowe tych układów równań co pozwoli na ich pełną klasyfikację. Używając tej klasyfikacji, znajdziemy przykłady takich układów równań posiadających grupy symetrii o wysokich wymiarach. Te symetryczne przykłady układów równań różniczkowych, choć nieliniowe, będzie stosunkowo łatwo rozwiązać ze względu na ich wysoką symetrię.