

POPULARNONAUKOWE STRESZCZENIE PROJEKTU:

Matematyczna Mechanika Płynów

Piotr Bogusław Mucha (Uniwersytet Warszawski)

Głównym wyzwaniem projektu jest analiza matematyczna modeli mechaniki płynów (cieczy i gazów). Przedmiot badań to ważna gałąź matematyki stosowanej. Tu matematyczne wyniki mają swoją interpretację w innych dziedzinach nauki, w fizyce, biologii, chemii czy naukach społecznych. Aby zrozumieć potrzebę takich badań skupmy się na klasycznym przykładzie, najsłynniejszym otwartym problemie w równaniach różniczkowych cząstkowych – *VI Problemie Milenijnym*. Należy wykazać, że słabe (nisko regularne, dopuszczalnie niejednoznaczne) rozwiązania równań Naviera-Stokesa (NS) stają się klasyczne (regularne, jednoznaczne), dla odpowiednio regularnych danych początkowych. Pomimo prostego sformułowania, problem ten nie został rozwiązany od niemal 90 lat. Jako matematycy liczymy na to, że rozwiązanie dałoby początek zupełnie nowych teorii równań różniczkowych cząstkowych i stworzyło powiązania z innymi działami matematyki. Z punktu widzenia fizyki wynik ten byłby odpowiedzią na zasadnicze pytanie czy równania NS mogą modelować przepływ turbulentny. Rozwiązanie w istotny sposób ułatwiłoby także numeryczną implementację układów opartych na NS. Jednocześnie jeden z najbardziej zaawansowanych wyników dla klasycznych równań Eulera (E) (C. DeLellis, L. Székelyhidi, 2009) pokazuje istnienie bardzo słabych, wysoce niejednoznacznych rozwiązań, nie gwarantujących żadnych fizycznych własności (np. energia układu może pojawiać się i znikać). Dla takich wyników trudno znaleźć użyteczne interpretacje. Zestawienie tych dwóch przykładów pokazuje olbrzymie pole do popisu dla matematyków by zrozumieć dogłębnie modele, ich możliwości, a jednocześnie rozwijać matematykę na najwyższym poziomie.

Nasze badania skoncentrują się na klasycznych układach opartych o równania Eulera i Naviera-Stokesa opisujących płyny proste, oraz na układach ze strukturą, dających możliwość opisu bardziej skomplikowanych/realistycznych przepływów. Dla zrozumienia istoty matematycznej problemu często ważne jest badanie układów uproszczonych. Niosą one informację umożliwiającą określanie stosowalności danego układu, wskazują interesujące jakościowe zachowania, czy dostarczają efektywnego algorytmu rozwiązującego układ w generycznym przypadku (np. w równaniach związanych z teorią przetwarzania obrazów). Jednocześnie ich przejrzysta struktura umożliwi nam rygorystyczną matematyczną analizę. Naszym celem, jako matematyków stosowanych, jest określenie jak i kiedy układ uproszczony może zastąpić skomplikowany układ wyjściowy, pokazanie które cechy układu określają fizycznie obserwowane własności.

Z matematycznego punktu widzenia rozważane układy nie mają dobrze określonego typu, zatem żadna z ogólnych teorii nie może być zastosowana bezpośrednio. Musimy je łączyć i tworzyć nowe narzędzia, które będą mogły być wykorzystane w innych dziedzinach. Skoncentrujemy się na badaniu następujących własności: regularność rozwiązań, ich jednoznaczność oraz opis wszelkich jakościowych zachowań układu. Wszystkie te cechy są nieodzowne przy próbie interpretacji fizycznych. Zagadnienia te są obecnym przedmiotem badań czołowych grup badawczych. Rozwiązania spamowe (DeLellis-Székelyhidi) pojawiły się w ubiegłym dziesięcioleciu, nowe techniki dla słabych rozwiązań modeli ściślejszych (Bresch-Jabin) z ostatnich lat. Naszym celem jest jednak nie sama współpraca z najlepszymi, lecz kreowanie głównego nurtu badań, przykładem czego mogą być ostatnie osiągnięcia duetu Danchin-Mucha. Realizacja grantu zaowocuje przełomowymi rezultatami, które dadzą początek nowym nurtom we współczesnej matematyce stosowanej.