Ustalmy liczbę pierwszą p i niezerową liczbę wymierną x. Wówczas x może zostać przedstawiona w jednoznaczny sposób w postaci $\frac{a}{b}p^t$, gdzie $a \in \mathbb{Z}$, $b \in \mathbb{N}_+$, $p \nmid ab$ oraz $t \in \mathbb{Z}$. Wykładnik t w powyższym przedstawianiu nazywamy waluacją p-adyczną liczby x i zapisujemy ją jako $\nu_p(x)$. W przypadku $x = 0$ kładziemy $\nu_p(0) = +\infty$. Następnie, dla każdej liczby wymiernej x definiujemy jej normę p-adyczną $|x|_p := p^{-\nu_p(x)}$. Zauważmy, że norma p-adyczna daje strukturę przestrzeni metrycznej na ciele $\mathbb{Q}$. Jego uzupełnienie względem normy p-adycznej jest ciałem topologicznym, zwanym ciałem liczb p-adycznych $\mathbb{Q}_p$.

Badanie waluacji p-adycznych wyrazów ustalonych ciągów liczb wymiernych w ogólności jest zagadnieniem nietrywialnym i ciekawym. Zajmuje się nim wielu matematyków. Znajomość waluacji p-adycznych wyrazów ustalonego ciągu pozwala nam określić, które z tych wyrazów są liczbami całkowitymi i pomaga nam przy rozwiązywaniu pewnych równań diofantycznych. Jeśli $n \in \mathbb{N}$, to wtedy definiujemy liczbę $H_p(n)$ jako liczbę rozwiązań równania $\sigma^p = id$ w grupie S_n. Jakościowy opis wartości $\nu_p(H_p(n))$ jest znany dla każdej liczby pierwszej p. Zauważmy, że $H_p(n)$ jest liczbą permutacji $\sigma \in S_n$, które dają się zapisać jako iloczyny parami rozłącznych cykli długości p. W ten sam sposób można zdefiniować dla każdej liczby naturalnej $d \geq 2$ liczbę $H_d(n)$ jako liczbę permutacji $\sigma \in S_n$, które dają się zapisać jako iloczyny parami rozłącznych cykli długości d. Warto zauważyć, że do tej pory nie jest znany opis waluacji p-adycznych liczb $H_d(n)$ w przypadku, gdy $p > d$ (nawet dla $d = 2$).

Dla zbioru $A \subset \mathbb{N}$ definiujemy jego zbiór ilorazów jako $R(A) = \left\{\frac{a}{b} : a, b \in A, b \neq 0\right\}$. Wyniki dotyczące gęstości zbiorów $R(A)$, gdzie $A \subset \mathbb{N}$, w zbiorze dodatnich liczb rzeczywistych są znane od dziesięcioleci. Z drugiej strony, zagadnienie gęstości zbiorów ilorazów podzbiorów $\mathbb{N}$ w ciałach liczb p-adycznych jest zagadnieniem stosunkowo nowym. Dlatego zawiera ono wiele nierozwiązanych problemów, jak na przykład problem p-adycznej gęstości zbiorów $R(A)$, gdzie A jest zbiorem wartości ustalonej formy kwadratowej lub zbiorem sum n potęg liczb naturalnych o wykładniku 4 lub 5, gdzie $n \in \mathbb{N}_+$ jest ustalone. Innym problemem otwartym w tej dziedzinie jest pytanie o istnienie takiego podziału zbioru $\mathbb{N}$ na dwa podzbiory A i B, że dla dowolnej liczby pierwszej p żaden ze zbiorów $R(A)$, $R(B)$ nie jest gęsty w $\mathbb{Q}_p$.

Pierwszym celem projektu *Własności p-adyczne pewnych ciągów kombinatorycznych i podzbiorów zbioru liczb naturalnych* jest uzyskanie jakościowego opisu waluacji p-adycznych liczb $H_d(n)$, gdzie $p > d \geq 2$ są ustalone. Zamierzam również uzyskać wyniki dotyczące tożsamości kombinatorycznych dla liczb $H_d(n)$, ich dzielników pierwszych oraz okresowości ich reszt z dzielenia przez ustaloną liczbę naturalną dodatnią. Drugim celem jest badanie p-adycznej gęstości zbiorów ilorazów wartości form kwadratowych i sum czwartych i piątych potęg liczb naturalnych. Dodatkowo planuję rozważyć zbiory ilorazów wyższych potęg. Oprócz tego, zamierzam odpowiedzieć na pytanie, czy istnieją takie rozłączne podzbiory zbioru $\mathbb{N}$, że ich sum jest równa $\mathbb{N}$ i żaden z ich zbiorów ilorazów nie jest gęsty w $\mathbb{Q}_p$ dla jakiejkolwiek liczby pierwszej p.