Zagadnienia strukturalne w teorii hipergrafów gęstych i losowych (streszczenie popularnonaukowe)

Andrzej Ruciński

Zasadniczym celem projektu jest dokonanie dalszego postępu w teorii hipergrafów extremalnych i losowych. W ramach projektu rozważam 4 zadania badawcze: #1. Problemy typu Diraca i Turána dla skojarzeń i cykli Hamiltona w hipergrafach. #2. Własności gęstych hipergrafów z losowo dodanymi krawędziami. #3. Losowe procesy hipergrafowe o ograniczonym stopniu. #4. Wzajemne relacje pomiędzy modelami hipergrafów losowych.

Pierwsze zadanie można zaliczyć do klasycznej teorii hipergrafów ekstremalnych, a ostatnie dwa do teorii dyskretnych struktur losowych. Zadanie #2 można zaliczyć do obszaru wspólnego obu tych teorii. Wszystkie jednak należą do głównego nurtu współczesnej kombinatoryki. Przedmiotem badań są tu hipergrafy, naturalne uogólnienie grafów, o dużym potencjale aplikacyjnym. Szczególną rolę pełni w nich pojęcie cyklu Hamiltona, które awansowało z pozycji XIX-wiecznej łamigłówki do roli jednego z najważniejszych obiektów teorii grafów. Dotychczas, w przeciwieństwie do grafów Eulera, czy skojarzeń doskonałych, nie znaleziono charakteryzacji grafów hamiltonowskich. Co gorsza, problem rozstrzygnięcia czy graf jest hamiltonowski jest NP-zupełny. W konsekwencji, wszystkie problemy powiązane z istnieniem cyklu Hamiltona w grafach, a tym bardziej w hipergrafach, są bardzo trudne. Dotyczy to w szczególności zadań badawczych #1 i #2.

W ramach zadania badawczego #1, dotyczącego problemów typu Turána i Diraca dla hipergrafów, chciałbym udowodnić hipotezę Erdősa o skojarzeniach (z 1965 r.) dla $k = 4$ oraz wyznaczyć progi dirakowskie dla skojarzeń doskonałych (dla $k \geq 6$) i dla ciasnych cykli Hamiltona (dla $k \geq 4$). W ramach zadania #2 stawiam pytanie o najmniejszą liczbę m taką, że dodanie m losowych krawędzi do n-wierzchołkowego k-grafu H o minimalnym stopniu wierzchołka $\delta(H) \geq \alpha\binom{n-1}{k-1}$ powoduje z dużym prawdopodobieństwem powstanie potęgi cyklu Hamiltona. W ramach zadania #3 planuję badać losowy d-proces grafowy poprzez schematy urnowe. To pozwoli mi zastosować znane wyniki i metody tej teorii i, mam nadzieję, przyniesie nowe, dokładniejsze wyniki dotyczące prawdopodobieństwa nasycenia takiego procesu.

W końcu, zadanie #4 skupia się na relacji pomiędzy różnymi modelami grafów losowych. Teoria grafów losowych została zainicjowana serią prac P. Erdősa i A. Rényego w latach 1959-1968. Początkowo badano głównie dwa modele: dwumianowy $G(n,p)$ i jednostajny $G(n,m)$. Dużo mniej wiadomo na temat regularnego grafu losowego $R(n,d)$, który jest dużo trudniejszy, bo brak mu niezależności krawędzi modelu $G(n,p)$ i łatwości przeliczeniowej modelu $G(n,m)$. Moim celem jest zanurzenie jednego z modeli Erdősa - Rényiego w model $R(n,d)$ tak, by wszystkie jego własności rosnące można było przenieść do $R(n,d)$.