Dynamika z punktu widzenia pojedynczych orbit: quasi-kryształy, miary niezmiennicze, złożoność

(Popularnonaukowe streszczenie projektu)

Nauki przyrodnicze i społeczne używają języka matematyki, aby otrzymać modele, czyli przybliżone opisy zjawisk zachodzących w otaczającym nas świecie. Mianem *układów dynamicznych* nazywamy takie modele, które opisują procesy zmieniające się w czasie lub w przestrzeni. Ich analiza pomaga w zrozumieniu i przewidywaniu ewolucji zjawisk opisanych w języku matematyki przy pomocy równań i funkcji.

Tematem przewodnim projektu są związki pomiędzy globalnymi własnościami układu dynamicznego a zachowaniem pojedynczych orbit tego układu. Orbitą punktu nazywamy zbiór stanów, które ten punkt odwiedza wskutek stosowania praw ewolucji zapisanych w danym modelu. Takie podejście z perspektywy „pojedynczej orbity” często występuje w dynamice topologicznej. Kluczowe w nim są pytania: Czy mając częściową lub przybliżoną wiedzę o strukturze orbit można otrzymać kompletną orbitę zawierającą tę samą informację? Czego można dowiedzieć się o układzie w oparciu o istnienie takiej pojedynczej orbity? Z tymi pytaniami związane są własności specyfikacji i śledzenia. Pojęcia te należą do najważniejszych narzędzi dynamiki topologicznej. Śledzenie umożliwia konstrukcje orbit odtwarzających tzw. pseudo-orbity (ciągi punktów, w których każdy kolejny punkt jest jednostajnie blisko obrazu w naszym modelu poprzedniego punktu ciągu). Specyfikacja pozwala na przybliżanie dowolnej kolekcji segmentów orbit przez pojedynczą orbitę. Obie własności związane są z teorią układów hiperbolicznych i obie mają liczne odmiany wykorzystywane w badaniach różnorodnych układów dynamicznych. Z tymi dwiema własnościami łączą się pojęcia entropii topologicznej i złożoności, które mierzą jak szybko rośnie liczba rozróżnialnych (odległych jeden od drugiego) segmentów orbit o długości n w układzie, gdy n zmierza do nieskończoności.

Chcielibyśmy skupić się na tych orbitach, które dostarczają nam najwięcej informacji o badanym zjawisku, czyli takich, których zachowanie jest typowe, czyli zgodne ze statystycznym zachowaniem układu. Aby móc powiedzieć, co to znaczy *typowe*, musimy najpierw ustalić *miarę*, dzięki której będziemy w stanie stwierdzić, jak wygląda statystycznie średnie zachowanie orbity w układzie. Będziemy rozważać tylko miary *probabilistyczne i niezmiennicze*, to jest takie, które opisują prawdopodobieństwa występowania pewnych zdarzeń w układzie i prawdopodobieństwa te nie zależą od czasu (nie zmieniają się w czasie). Wśród nich można wyróżnić *miary ergodyczne*, to znaczy miary, względem których dynamika jest nierozkładalna na nietrywialne podukłady. Wiadomo, że zbiór wszystkich miar niezmienniczych ma strukturę *sympleksu*, czyli jest podobny do wielowymiarowego (być może nieskończenie wymiarowego) trójkąta. „Wierzchołkami” takiego trójkąta są właśnie miary ergodyczne. *Twierdzenie ergodyczne Birkhoffa* mówi, że dla każdej miary ergodycznej istnieje punkt, który będzie odwiedzał duże (względem tej miary) zbiory często a małe — rzadko. Co więcej, takich punktów jest bardzo dużo (względem tej miary).

Poznanie własności miar niezmienniczych pomaga w zrozumieniu dynamiki zjawiska, które badamy. Można to zilustrować na przykładzie *entropii*. Mówiąc ogólnie, entropia mierzy jak bardzo *złożona* jest dynamika badanego zjawiska. *Entropia topologiczna* układu dynamicznego bada, ile różnych orbit jesteśmy w stanie zaobserwować, jeżeli dysponujemy urządzeniem o asymptotycznie doskonałej zdolności rozdzielczej. *Entropia dynamiczna* miary niezmienniczej jest tym większa, im bardziej skomplikowana jest dynamika układu, jeżeli bierzemy pod uwagę tylko to, co dzieje się na dużym zbiorze (względem tej miary). Wiadomo, że entropia topologiczna jest ograniczona z dołu przez *entropię dynamiczną* każdej miary niezmienniczej i może być dowolnie dobrze przybliżana przez entropie takich miar.

Klasa układów dynamicznych o zerowej entropii (czyli pozornie nieskomplikowanych) jest bogata. Należą do niej na przykład wszystkie izometrie, ale również modele, które są znacznie mniej regularne. Dlatego, aby opisać złożoność układów o zerowej entropii, potrzebujemy dodatkowych narzędzi.

Realizując projekt będziemy badać między innymi układy, które pomagają zrozumieć zachowanie *quasi-kryształów*, czyli ciał stałych, w których atomy układają się w regularną, ale niepowtarzającą się strukturę. Takie materiały mogą być modelowane przez przestrzeń podzieloną na wypukłe wielościany w sposób bardzo uporządkowany (i spełniający dodatkowe techniczne własności).