

Efektywne obliczenia w matematykach predykatywnych

Według Alexandra Grothendiecka badania matematyczne polegają na zrozumieniu istoty rzeczy, rzeczy jakimi one są, a zatem aktywność badawcza jest na tym samym poziomie co nauczanie, objaśnianie i pokazywanie matematyki. Opisywał on swoją działalność w matematyce jako proces tworzenia nowych alternatywnych światów, gdzie problemy wymagające rozwiązania mogą naturalnie egzystować i zostać w łatwy sposób rozwiązane. Niektóre problemy wydają się trudne tylko dlatego, że patrzymy na nie z perspektywy niewłaściwego świata. Światy, które budował Grothendieck, znane są obecnie jako topusy Grothendiecka.

Przejawy tej filozofii można odnaleźć również w bieżących pracach innych naukowców, dotyczących zbiorów nominalnych i zbiorów z atomami. Idea traktowania danej struktury matematycznej jako egzystującej wewnątrz alternatywnego świata doprowadziła do szeregu prac odwołujących się do zbiorów nominalnych, w wyniku których nastąpiło spore uproszczenie metod i dowodów pewnych znanych twierdzeń, i rzucenie światła na wcześniej nieznaną zjawiska. Podobna motywacja leżała u podstaw prac nad fundamentami teorii automatów w zbiorach z atomami. Zbiory z atomami stanowią alternatywę dla klasycznych teoriomnościowych podstaw matematyki. W zbiorach z atomami niektóre nieskończone, choć bardzo symetryczne struktury, zachowują się jakby były skończone. Z uwagi na to można przenieść klasyczną analizę i algorytmy ze zbiorów skończonych na pewne zbiory nieskończone. Bieżące wyniki pokazują, że jest to faktycznie możliwe i prowadzi do wielu praktycznych zastosowań: m.in. teorii automatów uprawianej nad nieskończonymi alfabetami, model checkingu, algorytmizacji szerszych klas spełnialności na ograniczeniach (CSP), czy powstania nowych języków programowania¹. Celem proponowanego projektu, z perspektywy filozofii Alexandra Grothendiecka, jest znalezienie dokładniejszych wyjaśnień matematycznych fenomenów i lepsza ekspozycja matematyki tak, aby nowe twierdzenia mogły się same pojawić i aby ujawniły się dotąd niezbadane obszary matematyki, zapoczątkowując badania w nowych kierunkach. Co więcej, wynikiem projektu będzie unifikacja teorii z różnych gałęzi matematyki i informatyki, zapobiegająca procesowi ponownego odkrywania na nowo dawno już odkrytych wyników. Projekt ten ma jednak przynieść więcej korzyści.

W rzeczy samej, projekt ten znajduje się w kwadracie Pasteura — dotyczy on bowiem badań podstawowych, jednak silnie inspirowanych realnymi problemami i z bezpośrednimi zastosowaniami w praktyce: w szczególności do formalnej weryfikacji systemów typu „mission critical” i „safety critical”. Niezawodność takich systemów informatycznych jest jedną z najważniejszych i najtrudniejszych do osiągnięcia kwestii w procesie projektowania systemu. Awaryjne w systemach typu „mission critical” i „safety critical” mogą powodować długotrwałe szkody w środowisku, śmierć ludzi, a nawet zniszczenie całych cywilizacji. Dla przykładu w 1980 r. północnoamerykańskie dowództwo obrony powietrznej poinformowało, że USA zostało zaatakowane i rozpoczęło przygotowania do kontrataku nuklearnego. Na szczęście szybko okazało się, że raport został spowodowany awarią systemu NORAD i przygotowania do kontrataku zostały wstrzymane. Trzy lata później radzieckie satelity wczesnego ostrzegania zgłosiły nadciąganie pięciu pocisków balistycznych należących do Stanów Zjednoczonych. Oficer dyżurny, Stanisław Pietrow, podejrzewając błąd w systemach komputerowych, zdecydował się złamać oficjalne procedury i nie odpalić pocisków nuklearnych - tym samym ratując świat przed wojną nuklearną na pełną skalę. Późniejsze śledztwo wykazało, że system informatyczny działał nieprawidłowo. W latach 1985-1987 urządzenie medyczne Therac-25 doprowadziło do masowego przedawkowania promieniowania udzielanego pacjentom podczas terapii, doprowadzając do sześciu zgonów i wielu powikłań. Usterka urządzenia spowodowana była błędami współbieżności, powodującymi tzw. „race condition”. W 2004 r. wdrożono nowy system komputerowy w Agencji Wsparcia Dziecka w Wielkiej Brytanii. Oprogramowanie zawierało ponad 500 błędów i doprowadziło do nadpłacenia 1 900 000 osób i niedopłacenia około 700 000 osób.

Techniki model-checking’u pomagają w weryfikacji systemów i modeli systemów, automatyzując ten proces i tworząc formalne dowody poprawności systemu, lub też dostarczając jawne kontrprzykłady na jego niedziałanie. Niestety, klasyczny model-checking dotyczy wyłącznie skończonych systemów i jako taki może być stosowany do weryfikacji procesów projektowania sprzętu, jednak nie bezpośrednio do oprogramowania komputerowego (choć niektóre części systemów komputerowych mogą zostać „zrzutowane” do maszyn skończenie stanowych i formalnie zweryfikowane). Powodem tego ograniczenia jest to, że dodanie do automatów skończonych dodatkowej mocy wyrazu, która jest potrzebna do modelowania pełnych systemów komputerowych, powoduje, że proces weryfikacji jest nierozstrzygalny (tj. nieautomatyzowalny). Niemniej jednak, ostatnie wyniki pokazują, że niektóre nieskończone systemy mogą być traktowane jako skończone z perspektywy alternatywnej matematyki i tym samym weryfikowane efektywnie. Nasz projekt doprowadzi do ogólniejszego spojrzenia na alternatywne matematyki, dając tym samym nowe techniki weryfikacji systemów.

¹Implementacja λ - języka funkcyjnego wspierającego obliczenia na nieskończonych strukturach z atomami - jest dostępna pod adresem: <https://www.mimuw.edu.pl/~szynwelski/nlambda/>.