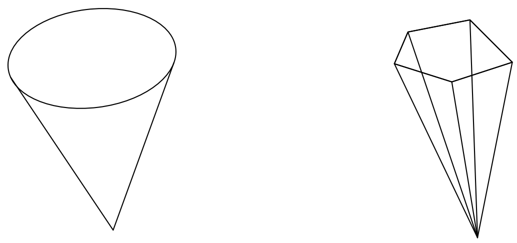
Dodatniość wiązek liniowych na powierzchniach algebraicznych

Popularnonaukowe streszczenie projektu

Głównym przedmiotem badań w geometrii algebraicznej są rozmaitości algebraiczne. Są one definiowane jako zbiór rozwiązań układu równań wielomianowych. W badaniach rozważam zespolone rozmaitości algebraiczne, tj. zdefiniowane nad ciałem liczb zespolonych.

Zespolone powierzchnie algebraiczne są rozmaitościami wymiaru dwa. Jednym z potężnych narzędzi w badaniu rozmaitości algebraicznych są dywizory. W przypadku powierzchni dywizory są uogólnieniem pojęcia krzywej, można powiedzieć, że są liniowymi kombinacjami krzywych o całkowitych, wymiernych albo nawet rzeczywistych współczynnikach. Dywizory o współczynnikach rzeczywistych tworzą rzeczywistą przestrzeń wektorową skończonego wymiaru. Wymiar tej przestrzeni jest sam w sobie bardzo ciekawym niezmiennikami powierzchni. Jakkolwiek, dywizory zawierają znacznie więcej informacji na temat powierzchni. Może ona być ekstrapolowana na podstawie analizy zbiorów dywizorów posiadających określone własności, jak dodatnie przecięcie z wszystkimi krzywymi na powierzchni.

Dla niektórych własności zbiór dywizorów je posiadających tworzy stożki. Jednym z przedmiotów moich badań jest badanie tych stożków, które będzie prowadzić do lepszego zrozumienia powierzchni algebraicznych. A priori stożki dywizorów mogą mieć różne kształty, na przykład mogą być zaokrąglone lub wielokątne, zob. rysunek poniżej:



Stożki są nieskończone, ale można je przecinać z hiperpowierzchnią daną za pomocą specjalnego dywizora. Pod pewnymi założeniami otrzymane przecięcie będzie ograniczone, a jego objętość jest ważnym niezmiennikiem, który będzie obiektem moich badań.

Oprócz objętości stożków, w ramach projektu będą badane stałe Seshadriego. Stałe Seshadriego mierzą dodatniość dywizora. Zadziwiający jest fakt, że chociaż definicja stałej Seshadriego nie jest skomplikowana, dokładne wartości tych stałych niezwykle trudne obliczyć. Nawet proste pytanie, czy stałe Seshadriego są zawsze wymierne, wciąż pozostaje otwarte.

Zajmę się również k-dżet szerokością dywizorów na powierzchniach hipereliptycznych. Pytanie o to, czy dywizor jest k-dżet szeroki jest pytanie o to, czy odwzorowanie przypisujące cięciu globalnemu jego wartości i pochodne do rzędu k_i w r punktach $x_1, \ldots x_r$ jest odwzorowaniem „na".

Większość zadań badawczych tego projektu będzie podejmowane na powierzchniach hipereliptycznych, które są iloczynem krzywych eliptycznych podzielonym przez działanie grupy, ale będę także pracować na innych powierzchniach algebraicznych.

Zamierzam także zbadać filozoficzne aspekty hipotez związanych z 14 Problemem Hilberta, który to Problem zainspirował rozwój tego obszaru geometrii algebraicznej.