Nr rejestracyjny: 2018/28/T/ST1/00117; Kierownik projektu: mgr Michał Jan Miśkiewicz

POPULARNONAUKOWY OPIS BADAŃ NAUKOWYCH PROWADZONYCH W RAMACH ROZPRAWY DOKTORSKIEJ

MICHAŁ MIŚKIEWICZ

Jednym z podstawowych problemów w geometrii różniczkowej jest badanie własności przekształceń między rozmaitościami $u\colon \mathcal{M} \to \mathcal{N}$ (czyli między krzywymi, powierzchniami etc.), a zwłaszcza przekształceń w jakimś sensie optymalnych. Jeśli za optymalne przyjąć przekształcenia, dla których objętość obrazu jest minimalna (tzn. małe lokalne zaburzenie u prowadzi do zwiększenia objętości), prowadzi to do teorii *powierzchni minimalnych*. Zamiast tego można minimalizować całkę z kwadratu wielkości pochodnej $\int_{\mathcal{M}} |\nabla u|^2$ (podobna wielkość pojawia się w modelach fizycznych jako energia, stąd nazwa *energia Dirichleta*); to drugie podejście prowadzi do teorii (minimalizujących) *przekształceń harmonicznych*, której dotyczy moja praca doktorska. Jak widać, teoria ta czerpie motywacje zarówno z pewnych modeli fizycznych (np. opisu struktury ciekłych kryształów), jak i matematyki czystej.

Przykładem przekształcenia harmonicznego będzie $u\colon \mathbb{B}^3 \to \mathbb{S}^2$, które minimalizuje energię w klasie przekształceń równych na brzegu przekształceniu identycznościowemu $\mathrm{id}\colon \mathbb{S}^2 \to \mathbb{S}^2$. Na mocy twierdzenia Brouwera u nie może być ciągłe, a tym bardziej klasy C^1, co motywuje rozważanie szerszej klasy przekształceń Sobolewa $W^{1,2}(\mathbb{B}^3, \mathbb{S}^2)$, powszechnie używanej w równaniach różniczkowych cząstkowych. Fenomen *osobliwości* przekształceń harmonicznych jest jednak bardziej subtelny i występuje również pod nieobecność przeszkód topologicznych – znane są przykłady przekształceń brzegowych $\varphi\colon \mathbb{S}^2 \to \mathbb{S}^2$, dla których istnieją gładkie przedłużenia na kulę, ale powstanie osobliwości pozwala zmniejszyć energię przekształcenia.

W przypadku przekształceń harmonicznych $u\colon \mathcal{M} \to \mathcal{N}$ z n-wymiarowej dziedziny $\mathcal{M}$ wiadomo, że u jest gładkie (klasy C^∞) poza pewnym domkniętym prostowalnym $(n-3)$-wymiarowym zbiorem $\operatorname{sing} u \subseteq \mathcal{M}$. Naturalne są w tym kontekście pytania o wielkość i strukturę zbioru osobliwego, które pokrótce zarysuję.

W pierwszym z wymienionych kierunków Naber i Valtorta wykazali niedawno, że $(n-3)$-wymiarowa miara Hausdorffa $\mathcal{H}^{n-3}$ (odpowiednik miary powierzchni dla niegładkich obiektów) zbioru osobliwego $\operatorname{sing} u$ jest skończona. Pozwala to zadać dalsze pytania: jeśli $u\colon \mathbb{B}^n \to \mathcal{N}$ minimalizuje energię wśród przekształceń równych na brzegu zadanemu $\varphi\colon \mathbb{S}^{n-1} \to \mathcal{N}$, to czy miarę $\mathcal{H}^{n-3}(\operatorname{sing} u)$ można ograniczyć z góry przez stałą zależną jedynie od n, $\mathcal{N}$ oraz stałej Lipschitza przekształcenia φ? Możliwych naturalnych hipotez dotyczących oszacowań na wielkość $\operatorname{sing} u$ jest wiele, a wprowadzone przez Nabera i Valtortę nowatorskie narzędzia wydają się obiecujące w kontekście dalszego rozwoju.

Druga grupa pytań dotyczy przypadków, kiedy zbiór osobliwy $\operatorname{sing} u$ jest $(n-3)$-wymiarową rozmaitością; w ogólności daje się on jedynie pokryć przez rozmaitości, ale nie musi stanowić ich otwartego podzbioru. Poza najprostszym przypadkiem $n = 3$ (gdy zbiór $\operatorname{sing} u$ jest skończony), Hardt i Lin wykazali, że zbiór osobliwy przekształceń $u\colon \mathbb{B}^4 \to \mathbb{S}^2$ rzeczywiście jest rozmaitością, a dokładniej $\operatorname{sing} u$ składa się ze skończenie wielu krzywych i izolowanych punktów. W tym kontekście narzucają się pytania o rolę wymiaru ($n = 4$ jest niejako najmniejszą nietrywialną wartością) i sfery $\mathbb{S}^2$ (jakie inne rozmaitości $\mathcal{N}$ w obrazie mają tę samą własność?). Ich badanie prowadzi do interesujących problemów otwartych, które są bliskie klasycznemu zagadnieniu szukania przekształceń harmonicznych $u\colon \mathbb{S}^2 \to \mathcal{N}$ w zadanej klasie homotopii.

Dziedzina przekształceń harmonicznych znajduje się na styku geometrii różniczkowej i równań różniczkowych cząstkowych, stąd też czerpie wiele idei i technik. Bardzo owocne okazują się związki z innymi problemami pochodzenia geometrycznego; głęboka analogia ze wspomnianymi już powierzchniami minimalnymi wydaje się szczególnie obiecująca.