

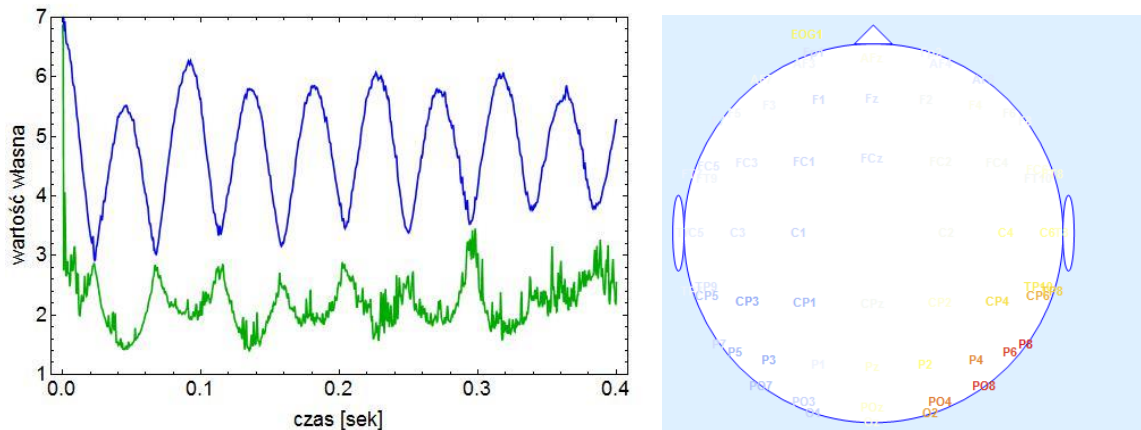
## Wektory własne macierzy przypadkowych – teoria i zastosowania

Wojciech Tarnowski

W XXI w. gromadzi się niewyobrażalne ilości danych. Zwykle przechowuje się je w postaci tabel, w których wiersze mogą oznaczać np. konkretne spółki giełdowe czy stacje meteorologiczne, a w kolumnach zapisywane są notowania tych spółek czy wskazania termometru. Matematycy takie obiekty nazywają macierzami i potrafią wykonywać na nich różne działania, które mogą mieć zupełnie inne własności niż poznane w szkole liczby. Na przykład, wynik mnożenia zależy od kolejności czynników. Operacje matematyczne na macierzach są bardzo przydatne przy analizie i interpretacji danych, które w nich są zapisane.

W swojej pracy doktorskiej próbuję odpowiedzieć na pytanie co się dzieje, jeśli liczby wypełniające macierz są zupełnie przypadkowe i jak to wpływa na własności tych macierzy oraz wyniki przeprowadzanych na nich operacji matematycznych. Przypadkowość taka może być spowodowana na przykład wadliwym działaniem czujnika zbierającego dane, ale też może być wprowadzona przez człowieka celowo, aby modelować występującą w przyrodzie zmienność.

Szczególną uwagę kieruję tutaj na tak zwaną procedurę diagonalizacji. W jej wyniku otrzymujemy wartości własne oraz wektory własne. Wartości własne mogą mówić o tym jak znacząca jest informacja ukryta w odpowiadającym im wektorom własnym, co pozwala wprowadzić pewną hierarchię wśród otrzymanych wyników. W przypadku modelowania układów dynamicznych wartości własne mogą powiedzieć czy dany układ jest stabilny. W analizie danych liczby odpowiadające składowym wektorów własnych mówią które mierzone wartości dają dominujący wkład do informacji ukrytej w odpowiedniej wartości własnej. Przykład takiego zastosowania w badaniach nad mózgiem przedstawiony jest na poniższym rysunku.



Rysunek: (lewa strona) Zachowanie dwóch największych wartości własnych macierzy autokorelacji u osoby odpoczywającej. Mózg jest w fazie aktywności fal alfa, co obserwuje się jako oscylacje wartości własnej. (prawa) Analiza elementów wektorów własnych pozwala zlokalizować obszar, gdzie te fale są najsilniejsze, co zostało przedstawione na schematycznym rysunku skalą natężenia koloru. Kolor czerwony i niebieski odpowiadają przeciwnym fazom oscylacji. Oznaczenia literowe służą identyfikacji elektrod. Dane elektroencefalograficzne oraz schemat głowy otrzymano dzięki uprzejmości Jeremiego Ochaba (OchLab). Opracowanie własne.