Dynamika topologiczna uogólnionych układów $\mathscr{B}$-wolnych – opis popularnonaukowy

Aurelia Dymek

Mając przestrzeń wszystkich dwustronnych ciągów zero–jedynkowych wyposażoną w działanie przesunięcia lewostronnego, możemy rozważać jej podzbiory domknięte i niezmiennicze ze względu na przesunięcie. Ważnym przykładem takich podzbiorów jest domknięcie orbity danego ciągu zero–jedynkowego, czyli zbiór ciągów, które mogą być przybliżane przesunięciami tego punktu.

Dla dowolnego podzbioru zbioru liczb naturalnych $\mathscr{B}$ mówimy, że domknięcie orbity funkcji charakterystycznej dopełnienia zbioru wielokrotności elementów z $\mathscr{B}$ jest *układem $\mathscr{B}$-wolnym*. Szczególnym przypadkiem takich układów jest układ bezkwadratowy, dla którego zbiór $\mathscr{B}$ składa się z kwadratów liczb pierwszych. Badanie własności topologicznych tego układu zapoczątkował Sarnak [10] w 2010 roku. Jego rezultaty zainspirowały wielu matematyków do badania układów $\mathscr{B}$-wolnych i ich uogólnień [1], [2], [4], [5], [6], [7], [8], [9]. Wiele wiadomo o $\mathscr{B}$-wolnych układach, dla których zbiór $\mathscr{B}$ jest nieskończony, parami względnie pierwszy oraz szereg odwrotności jego elementów jest zbieżny. Badanie układów $\mathscr{B}$-wolnych bez tych założeń zasugerował Boshernitzan podczas konferencji *Ergodic Theory and Dynamical Systems* w Toruniu w 2014 roku. Zadanie to wykonaliśmy w [3]. Ponadto pokazaliśmy zastosowania układów $\mathscr{B}$-wolnych w teorii liczb, a mianowicie do zbioru liczb niedomiarowych.

Głównym celem projektu jest **badanie dynamiki topologicznej wielowymiarowych uogólnień układów $\mathscr{B}$-wolnych**. Mianowicie, nadal rozważać będziemy ciągi zero–jedynkowe, ale indeksowane zbiorem $\mathbb{Z}^d$, gdzie d jest co najmniej dwójką, z działaniem (grupy $\mathbb{Z}^d$) przesunięcia wielowymiarowego. Wielokrotności elementów zbioru $\mathscr{B}$ zastąpimy sumą mnogościową rodziny krat, czyli podgrup właściwych $\mathbb{Z}^d$ o skończonym indeksie. Niniejszy projekt ma na celu **rozwinięcie teorii wielowymiarowych układów $\mathscr{B}$-wolnych**.

Literatura

[1] E. H. El Abdalaoui, Mariusz Lemańczyk, Thierry de la Rue, *A dynamical point of view on the set of $\mathscr{B}$-free integers*, Int. Math. Res. Not. (publikacja online), (2014).

[2] M. Baake, C. Huck, *Ergodic properties of visible lattice points*, Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics 288 (2015), no. 1, 165–188.

[3] A. Bartnicka, S. Kasjan, J. Kułaga-Przymus, *$\mathscr{B}$-free sets and dynamics*, `https://arxiv.org/abs/1509.08010`, pojawi się w Trans. Amer. Math. Soc.

[4] F. Cellarosi, Ya. G. Sinai, *Ergodic properties of square-free numbers*, J. Eur. Math. Soc. 15 (2013), no. 4, 1343–1374.

[5] F. Cellarosi, I. Vinogradov, *Ergodic properties of k-free integers in number fields*, J. Mod. Dyn. 7 (2013), no. 3, 461–488.

[6] C. Huck, M. Baake, *Dynamical properties of k-free lattice points*, Acta Phys. Pol. A 126 (2014), 482–485.

[7] S. Kasjan, G. Keller and M. Lemanczyk, *Dynamics of $\mathscr{B}$-Free Sets: A View Through the Window*, International Math. Res. Notices, rnx196.

[8] R. Peckner, *Uniqueness of the measure of maximal entropy for the squarefree flow*, Isr. J. Math. (2015) 210: 335. `https://doi.org/10.1007/s11856-015-1255-8`.

[9] P. A. B. Pleasants, C. Huck, *Entropy and diffraction of the k-free points in n-dimensional lattices*, Discrete Comput. Geom. 50 (2013), no. 1, 39–68.

[10] P. Sarnak, *Three lectures on the Möbius function, randomness and dynamics*, `http://publications.ias.edu/sarnak/`.