

POPULARNONAUKOWE STRESZCZENIE PROJEKTU

Niniejszy projekt badawczy dotyczy ważnych aspektów analizy związanej z obiektami o symetrii radialnej (niezmienniczych na obroty względem „środką”), stowarzyszonych operatorów maksymalnych, a częściowo również nietrygonometrycznych rozwinięć ortogonalnych.

Jedno z zadań projektu dotyczy wciąż otwartego starego problemu dokładnego opisu zachowania jądra ciepła na sferach dowolnego wymiaru, w szczególności na „zwykłej” sferze wymiaru 2. Jest to jądro całkowe sferycznej półgrupy ciepła, która rozwiązuje równanie przewodnictwa ciepła na sferach, a zatem opisuje rozchodzenie się ciepła w takich ośrodkach. Jednocześnie jest to też gęstość prawdopodobieństwa przejścia dla sferycznego ruchu Browna, ważnego procesu stochastycznego modelującego ruch dyfundującej cząstki na powierzchni sfery. Te dwa fakty leżą u podstaw fizycznego znaczenia sferycznego jądra ciepła.

Inne zadanie projektu ma na celu zbadanie operatorów maksymalnych związanych z operacją uśredniania funkcji po sferach (tzw. sferyczną transformatą Radona lub średnimi sferycznymi) i dobrze umotywowanymi uogólnieniami tej operacji. Średnie sferyczne i ich generalizacje mają wielkie znaczenie w analizie ponieważ m.in. stanowią podstawę teoretyczną dla zastosowań fizycznych i praktycznych, jak np. termoakustyczna i fotoakustyczna tomografia, a także wyrażają rozwiązania klasycznych równań różniczkowych, np. równania fali, równania Tricomiego, czy ogólniejszego równania Eulera-Poissona-Darboux. Motywacją do badania rzeczonych operatorów maksymalnych jest fundamentalne pytanie o satysfakcjonującą spójność tychże rozwiązań z warunkami początkowymi o niezbyt dużej regularności.

Projekt przewiduje również badanie operatorów maksymalnych dyskretnych wariantów średnich sferycznych związanych z przestrzeniami o strukturze kraty (np. dowolny skończony produkt zbioru liczb całkowitych). Takie operatory nie są jeszcze dobrze zrozumiane z powodu trudności technicznych napotykanych przy ich analizie, ale są niezwykle intrygujące i mają niebagatelne znaczenie, w szczególności ze względu na głębokie związki z teorią liczb i teorią ergodyczną.

Pozostałe zadania projektu dotyczą m.in. nietrygonometrycznych rozwinięć ortogonalnych (będących uogólnieniami, w różnych kierunkach, klasycznych szeregów Fouriera) oraz analizy dunklowskiej. Projekt obejmuje analizę związaną m.in. z rozwinięciami Fouriera-Bessela, Laguerre’a i Jacobiego. Są one od bardzo dawna obecne w literaturze, a ich badanie, motywowane podobnie jak w przypadku klasycznym, przeżywa ostatnio swoisty renesans. W ramach projektu planowane jest mierzalne poszerzenie istniejącej wiedzy w tym obszarze. Z kolei teoria Dunkla jest stosunkowo młodym, ale dynamicznie rozwijającym się conceptem matematycznym z ważkimi interpretacjami fizycznymi w tle. Jest to w pewnym sensie zaburzenie sytuacji klasycznej związanej z transformatą Fouriera przez odbicia względem układów hiperpłaszczyzn („luster”). Zamierzeniem jednego z zadań projektu jest ukazanie, iż konteksty dunklowskie są dobrymi środowiskami do uprawiania analizy harmonicznej w istotnie większym zakresie niż się obecnie wydaje.

Wyniki uzyskane w trakcie realizacji projektu byłyby nowe, oryginalne i stanowiłyby zauważalny wkład do analizy rzeczywistej i harmonicznej, szczególnie do obszaru dotyczącego rozwinięć ortogonalnych. Dostarczyłyby one jednocześnie odpowiedzi na ważne pytania, zarówno takie, które pozostają od dawna otwarte, jak również te, które pojawiły się w ostatnich latach w związku z dynamicznym rozwojem pewnych obszarów analizy. Realizacja zadań zaproponowanych w projekcie wymagałaby również nowych idei i wypracowania nowatorskich metod, które same w sobie byłyby wartościowe z punktu widzenia ich potencjalnych zastosowań w badaniach prowadzonych w przyszłości.