Jednym z najważniejszych wyników logiki matematycznej jest twierdzenie Gödla o niezupełności (1931 r.), które w pewnym uproszczeniu mówi, że żaden system aksjomatyczny nie wystarczy do tego, by rozstrzygnąć wszystkie zagadnienia matematyki. Prowadzi to natychmiast do pytania, jakie konkretnie twierdzenia matematyczne nie mogą być udowodnione za pomocą naturalnych i spotykanych w praktyce aksjomatów. Być może najbardziej znany przykład podał w 1963 r. Paul Cohen, pokazując, że hipoteza continuum, która dotyczy możliwych rozmiarów nieskończonych podzbiorów zbioru liczb rzeczywistych, nie może być rozstrzygnięta za pomocą zwyczajowo przyjmowanych aksjomatów całej matematyki, tzw. aksjomatów Zermelo-Fraenkla. Samo sformułowanie hipotezy continuum mówi jednak o dosyć niecodziennych i zagadkowych obiektach. Z punktu widzenia matematyki spotykanej na co dzień aksjomaty Zermelo-Fraenkla są natomiast niesłychanie silne. Żeby zrozumieć, które twierdzenia bardziej zwyczajnej matematyki wymagają dowodów odwołujących się do bardzo abstrakcyjnych, nieoczekiwanych czy wręcz wątpliwych obiektów, należy badać słabsze systemy aksjomatyczne. Przykładowym efektem takich badań jest wskazane w 1977 r. przez J. Parisa i L. Harringtona twierdzenie z kombinatoryki skończonej, którego nie można udowodnić bez odwołania do jakichś obiektów nieskończonych, na przykład tak zwanych pozaskończonych liczb porządkowych.

Projekt będzie dotyczył dowodliwości w pewnych systemach aksjomatycznych odpowiednich do badania twierdzeń z zakresu kombinatoryki i teorii obliczeń. Będziemy się zajmować między innymi dwoma znanymi wynikami kombinatorycznymi: twierdzeniem Ramseya dla par i twierdzeniem Hindmana. To pierwsze głosi, że jeśli niektóre spośród danych nieskończenie wielu punktów połączymy krawędziami, to znajdzie się taki nieskończony zbiór punktów, w którym albo każde dwa punkty będą połączone, albo żadne nie będą; uogólnia to wiele słabszych faktów podobnej postaci na temat skończonych grafów. Twierdzenie Hindmana ma nieco bardziej skomplikowane sformułowanie, łączące idee w stylu Ramseya z własnościami dodawania liczb naturalnych. Siła aksjomatów potrzebnych do dowodu twierdzenia Hindmana jest od wielu lat zagadką: wszystkie dotychczasowe dowody nawet pozornie słabych wersji twierdzenia wymagają aksjomatów znacznie silniejszych niż potrzebne do dowodu zasady Parisa-Harringtona, a z drugiej strony, nie jest wykluczone, że wszystkie konsekwencje twierdzenia należące do kombinatoryki skończonej mają dowody całkowicie elementarne. Zamierzamy dążyć do zrozumienia, czy udowodnienie twierdzenia Hindmana i jego osłabień rzeczywiście wymaga nieelementarnych rozumowań. Przypadek twierdzenia Ramseya dla par jest nieco inny: choć dowód samego twierdzenia wymaga użycia dosyć skomplikowanych nieskończonych zbiorów, to niedawno pokazano, że bardzo wiele konsekwencji twierdzenia ma dowody będące w zasadzie rachunkami na liczbach naturalnych (por. artykuł w „Quanta Magazine" z 24 maja 2016). Niejasne jest na razie znaczenie praktyczne tego wyniku: nie wiadomo na przykład, czy te bardziej elementarne dowody konsekwencji twierdzenia Ramseya nie są astronomicznie wielkie w porównaniu z pierwotnymi dowodami. Pytanie to będzie jednym z przedmiotów zainteresowania projektu.

Dość pokrewne są pytania o siłę aksjomatów potrzebnych do udowodnienia pewnych wyników informatyki teoretycznej, w szczególności twierdzeń o istnieniu algorytmów rozwiązujących określone problemy obliczeniowe. Pewien wynik tego rodzaju, uzyskany przez M. Rabina w 1969 r., miał wyłącznie dowody wyróżniające się zaawansowaniem i abstrakcyjnością. Niedawno pokazaliśmy wraz ze współpracownikami, że było to nieuniknione: twierdzenie Rabina nie może być udowodnione bez odwołania do zbiorów o bardzo skomplikowanych, niemal „zapętlonych" definicjach. Co ciekawe, sam algorytm Rabina jest raczej elementarny; zaawansowane aksjomaty potrzebne są do udowodnienia jego poprawności, jak również poprawności każdego innego algorytmu rozwiązującego postawiony problem. Obecnie chcemy dokładniej opisać siłę aksjomatów niezbędnych do dowodu twierdzenia Rabina, jak również znaleźć inne przykładów twierdzeń informatycznych, których nie da się udowodnić bez użycia obiektów leżących z pozoru całkowicie poza zasięgiem zainteresowania informatyki. Być może nieoczekiwanie, będzie to również wymagało analizy siły logicznej pewnych wariantów tw. Ramseya.

Osobną część projektu będą stanowiły badania nad dowodliwością w systemach aksjomatycznych należących do tak zwanej arytmetyki ograniczonej. Systemy te są bardzo słabe, a niektóre niedowodliwe w nich zdania wyrażają zasady kombinatoryczne, które mogą się wydać „oczywiste". Przykładem jest zasada szufladkowa: „jeśli rozmieścić $n{+}1$ przedmiotów w n szufladach, to w przynajmniej w jednej szufladzie znajdzie się więcej niż jeden przedmiot". Badania nad arytmetyką ograniczoną wiążą się z analizą algorytmów rozstrzygających kluczowy w informatyce problem spełnialności: „czy w danej formule logicznej można tak ustalić wartości zmiennych, żeby cała formuła była prawdziwa". W uproszczeniu można powiedzieć, że każdy istotny wynik o niedowodliwości w arytmetyce organiczonej prowadzi do przykładu formuły, z którą jakiś konkretny algorytm nie poradzi sobie w rozsądnym czasie. Obecnie potrafimy takie przykłady podawać tylko dla bardzo prostych algorytmów, ale są wśród nich najpopularniejsze algorytmy stosowane w praktyce – przykładowo, algorytm stojący u podstaw znalezionego niedawno rozwiązania tzw. problemu boolowskich trójek pitagorejskich (por. „Communications of the ACM" z sierpnia 2017 r.). Naszym celem jest poszerzenie puli dostępnych przykładów, zwłaszcza w odniesieniu do systemów dysponujących pewnymi możliwościami zliczania.