STRESZCZENIE POPULARNONAUKOWE PROJEKTU BADAWCZEGO

WOJCIECH GÓRNY

Rachunek wariacyjny jest dziedziną matematyki, której celem jest znajdowanie minimów i maksimów funkcji określonych na nieskończenie wymiarowych obiektach; w zdecydowanej większości przypadków są to przestrzenie funkcyjne. Powstał on jeszcze w XVII-XVIII wieku i pierwsze zagadnienia z tej dziedziny to znalezienie krzywej najkrótszego spadku oraz powiązanie zagadnień minimalizacyjnych z równaniami różniczkowymi cząstkowymi za pomocą równań Eulera-Lagrange'a.

W każdym zagadnieniu rachunku wariacyjnego najważniejsze są trzy kwestie: istnienie rozwiązań w odpowiednio dobranej klasie, regularność rozwiązań, tzn. czy rozwiązania mają dodatkowe właściwości oraz jednoznaczność rozwiązań. W tym projekcie zamierzamy badać każdą z tych kwestii dla *anizotropowego zagadnienia najmniejszego gradientu*. Badania te są motywowane przez *zagadnienie obrazowania przewodnictwa* (ang. *conductivity imaging problem*), gdzie rozwiązywanie anizotropowego zagadnienia najmniejszego gradientu pojawia się w algorytmie służącym do obliczenia przewodniości wewnątrz obszaru Ω za pomocą pojedynczego pomiaru gęstości prądu wewnątrz Ω oraz wartości napięcia na brzegu Ω. Ponadto to zagadnienie ma związek z zagadnieniem *swobodnego projektowania materiałów* (ang. *free material design*), który dotyczy projektowania optymalnego kształtu przewodnika.

Anizotropowe zagadnienie najmniejszego gradientu jest to problem minimalizacji całkowitego wahania funkcji na danym obszarze Ω przy zadanych wartościach tej funkcji na brzegu obszaru Ω. Problem jest anizotropowy, tzn. wahanie całkowite funkcji nie jest mierzone w normie euklidesowej, ale w takiej zadanej normie ϕ, która może zależeć dodatkowo od kierunku pochodnej funkcji oraz od położenia wewnątrz Ω. Celem tego projektu jest zbadanie roli granej przez geometrię obszaru Ω oraz regularność ϕ w anizotropowym zagadnieniu najmniejszego gradientu. W ten sposób chcemy połączyć dwa główne podejścia do tego zagadnienia: pierwsze z nich używa metod geometrycznej teorii miary, ale wyraźnie korzysta z ciągłości danych brzegowych, podczas gdy drugie (bardziej ogólne) podejście pozwala na nieciągłości, ale warunek brzegowy rozumiany jest w nieco osłabiony sposób.

Chcemy poruszyć trzy kwestie: po pierwsze, istnienie rozwiązań dla dostatecznie dużej klasy nieciągłych danych brzegowych. Po drugie, chcemy zbadać kwestię jednoznaczności rozwiązań dla nieciągłych danych brzegowych; o ile nie przypuszczamy, że rozwiązania będą jednoznaczne, to spodziewamy się, że dla dostatecznie regularnej ϕ będą miały prawie identyczną strukturę poziomic. W obu powyższych przypadkach chcemy jak najbardziej osłabić geometryczne założenia na Ω. Wreszcie chcemy zbadać jednoznaczność rozwiązań dla ciągłych danych brzegowych bez dodatkowych założeń o regularności ϕ. Rozważamy dwa przypadki, zależnie od tego, czy kula jednostkowa w normie dualnej ϕ^* ma płaskie ścianki czy nie. Jeśli nie ma płaskich ścianek, spodziewamy się, że rozwiązania będą jednoznaczne dla dowolnych ciągłych danych brzegowych. Wynik tego typu uwolniłby rozważania dotyczące jednoznaczności od założeń na regularność ϕ i umożliwiłby numeryczne przybliżanie rozwiązań poprzez dodawanie dowolnie małych członów regularyzujących.