Nr rejestracyjny: 2017/27/N/ST1/00497; Kierownik projektu: mgr Jędrzej Garnek

Rozmaitości abelowe nad ciałami p-adycznymi
POPULARNONAUKOWE STRESZCZENIE PROJEKTU

Jędrzej Garnek

Rozmaitość algebraiczna to zbiór zadany przez równania wielomianowe (o współczynnikach w ustalonym ciele). *Rozmaitość abelową* definiujemy jako taką rzutową rozmaitość algebraiczną, że zbiór jej punktów tworzy grupę abelową wraz z działaniem określonym przez pewne funkcje wymierne. Pierwszym matematykiem, który rozważał krzywe eliptyczne (jednowymiarowe rozmaitości abelowe) był najprawdopodobniej Diofantos, który wymyślił metodę „podwajania punktów" na tych krzywych. Krzywe eliptyczne oraz Jakobiany krzywych wyższych genusów pojawiły się również w teorii funkcji zespolonych, rozwijanej przez dziewiętnastowiecznych matematyków. Do przełomu w tej dziedzinie doprowadziło pytanie zadane przez Henri Poincarégo: *czy jeżeli E jest krzywą eliptyczną nad ciałem liczb wymiernych $\mathbb{Q}$, to grupa $E(\mathbb{Q})$ jest skończenie generowana?* Pozytywnej odpowiedzi na to pytanie udzielił Louis Mordell w 1922 r. Jego wynik zapoczątkował badanie krzywych eliptycznych oraz rozmaitości abelowych nad ciałami liczbowymi. Kolejne kilkadziesiąt lat przyniosło dynamiczny rozwój tej dziedziny. Spośród wielu wyników wspominamy tylko o pracy Wilesa, która ostatecznie doprowadziła do udowodnienia Wielkiego Twierdzenia Fermata w 1994 r.

Załóżmy, że A jest rozmaitością abelową wymiaru g nad ciałem K. Podgrupa n-torsji rozmaitości A to zbiór punktów, które po n-krotnym dodaniu do siebie zerują się. Znanych jest wiele własności n-torsji. Przykładowo zazwyczaj mamy n^{2g} punktów n-torsyjnych na rozmaitości wymiaru g. Algebraiczne własności n-torsji (związane z wymiernością jej współrzędnych) są jednak znacznie trudniejsze do opisania. Zazwyczaj jest jednak ona *tak skomplikowana, jak tylko to możliwe* dla dużego n.

Przypomnijmy, że każda liczba naturalna ma zapis w postaci binarnej, tzn. sumy różnych potęg dwójki. Wprowadzając liczby, które mają nieskończoną postać binarną, otrzymujemy ciało $\mathbb{Q}_2$ liczb 2-adycznych. Formalnie, liczby takie tworzymy przyjmując, że wysokie potęgi dwójki są „małe". Analogicznie można rozważać ciało liczb p-adycznych dla dowolnej ustalonej liczby pierwszej p. Koncept ten został wprowadzony, by móc stosować techniki związane z analizą (teorię szeregów potęgowych) w teorii liczb.

Przez *lokalną torsję* rozmaitości $A/\mathbb{Q}$ rozumiemy jej p-torsję właśnie nad ciałem liczb p-adycznych. Podejrzewa się, że dla „typowej" krzywej eliptycznej $E/\mathbb{Q}$, jej lokalna torsja powinna znikać dla prawie wszystkich liczb pierwszych p. Hipotezę tę można uogólnić korzystając z pojęcia p-stopnia. Mierzy on najmniejszy możliwy „stopień skomplikowania" niezerowego punktu p-torsyjnego. Dla „typowej" krzywej eliptycznej $E/\mathbb{Q}$, jej p-stopień powinien rosnąć wraz ze wzrostem p. Pierwotną motywacją do rozważania tego typu problemów była teoria deformacji reprezentacji Galois. Celem pierwszej części projektu jest opisanie własności p-stopnia rozmaitości abelowych $A/\mathbb{Q}_p$.

Spodziewamy się znaleźć również inne zastosowanie dla lokalnej torsji krzywych eliptycznych.
n-te ciało podziału K_n rozmaitości abelowej $A/\mathbb{Q}$ powstaje przez dołączenie do $\mathbb{Q}$ współrzędnych punktów n-torsyjnych. *Liczba klas* ciała K_n mierzy, na ile zasada jednoznacznego rozkładu na liczby pierwsze jest prawdziwa dla tego ciała. Przewidujemy, że liczbę klas K_n można oszacować w zależności od niezmienników związanych z lokalną torsją rozmaitości.

Druga część projektu skupia się na pojęciu *kanonicznego podniesienia* rozmaitości abelowej. Rozmaitość abelowa zadana przez równania wielomianowe o współczynnikach w ciele skończonym może być „podniesiona" do ciała p-adycznego na wiele sposobów. Jest jednak jeden „kanoniczny" sposób, który zachowuje część własności wyjściowej rozmaitości. Kanoniczne podniesienia znalazły liczne zastosowania w algorytmicznej algebraicznej teorii liczb. Są one stosowane m.in. do konstruowania krzywych eliptycznych nad ciałami skończonymi o zadanej liczbie punktów, obliczania wielomianów klas Hilberta oraz konstruowania krzywych hipereliptycznych odpowiednich z punktu widzenia kryptologii. Spodziewamy się znaleźć powiązanie pomiędzy pojęciem kanonicznego podniesienia oraz hipotezą o p-stopniu. Ponadto planujemy zbadać kanoniczne podniesienia wyżej wymiarowych rozmaitości abelowych.