Metoda relatywnych entropii dla układów nieliniowych

Metody słabej zbieżności dla równań nieliniowych to jeden z dominujących nurtów współczesnej analizy. Skierujemy naszą uwagę w stronę rozwiązań miarowych – na pozór bardzo słabego pojęcia rozwiązania, jednak niezwykle przydatnego w przypadku właśnie problemów nieliniowych. Pokażemy jak metoda relatywnych entropii dla rozwiązań miarowych może być niezwykle przydatnym narzędziem. Jedną z podstawowych jej konsekwencji jest własność miarowej - silnej jednoznaczności. Jest to prawdziwie zaskakująca własność w obliczu powszechnego postrzegania miarowych rozwiązań jako obiektu słabego i istotnie niejednoznacznego. Oznacza ona, że jeśli tylko istnieje mocne rozwiązanie problemu, to każde miarowe rozwiązanie pochodzące z tych samych danych początkowych pokrywa się z tym rozwiązaniem mocnym.

W świetle kryzysu pojęcia słabych rozwiązań dla różnych równań mechaniki cieczy niewątpliwie skupienie się na rozwiązaniach miarowych jest istotne. Przypomnijmy, że przez bardzo długi okres istnienie słabych rozwiązań dla nieściśliwego układu Eulera w przypadku wielowymiarowym było problemem otwartym. Dopiero sięgnięcie do metod geometrii różniczkowej doprowadziło do przełomu. Wyniki Camillo De Lellisa i Laszlo Székelyhidi z ostatniej dekady wskazały na niejednoznaczność rozwiązań, a nawet wskazały przykłady danych początkowych, które prowadziły do istnienia nieskończenie wielu rozwiązań. Co więcej, ci sami autorzy pokazali, że kryteria dopuszczalności, w których pokładano nadzieję, że wybierają spośród niejednoznacznych słabych rozwiązań *rozwiązanie fizycznie właściwe*, zawiodły. Wykazali, że możliwe jest skonstruowanie nieskończenie wielu rozwiązań spełniających takie kryteria dopuszczalności jak na przykład nierówność energetyczna. Również w oparciu o tę samą koncepcję, czyli metodę wypukłego całkowania powstał pierwszy dowód istnienia globalnych w czasie słabych rozwiązań układu Eulera.