Popularnonaukowe streszczenie projektu

W projekcie będziemy zajmować się modelami odkształceń niesprężystych. W ogólności, model którym się zajmujemy zakłada, że badany jednorodny materiał o gęstości masy ρ zajmuje w przestrzeni trójwymiarowej zbiór Ω. Jeżeli do takiego materiału zostanie przyłożona siła (na przykład zaczniemy ściskać ten materiał) spowoduje to powstanie w nim przemieszczeń, które są opisane w każdym punkcie x zbioru Ω i w każdym czasie $t \geqslant 0$ przez trójwymiarowy wektor $u(x,t)$. Odkształcenia, które powstają w badanym materiale mierzy się za pomocą tak zwanego tensora odkształceń $\varepsilon(x,t)$, który jest wyliczany na podstawie zachodzących przemieszczeń. Odkształcenia występujące w materiale można podzielić na sprężyste (ustępują po usunięciu siły, która je spowodowała) oraz plastyczne (odkształcenia nieodwracalne) w następujący sposób

$$\varepsilon = \underbrace{\varepsilon - \varepsilon^p}_{\text{sprężyste}} + \underbrace{\varepsilon^p}_{\text{plastyczne}} .$$

Aby być odwracalne, odkształcenia sprężyste muszą powodować powstawanie w materiale pewnych sił (naprężeń) przeciwdziałających odkształceniu. Siły te mierzy się za pomocą tensora naprężeń $\sigma(x,t)$. Prawo Hooke'a mówi o proporcjonalnej zależność między odkształceniami sprężystymi a powstającymi w materiale naprężeniami. Wykorzystując dodatkowo II zasadę dynamiki Newtona można wyprowadzić równania łączące ze sobą przemieszczenia, odkształcenia i naprężenia. Równania te są postaci

$$\begin{aligned} \rho\, u_{tt}(x,t) - \operatorname{div}_x \sigma(x,t) &= F(x,t)\,, \\ \sigma(x,t) &= \mathcal{D}\left(\varepsilon(x,t) - \varepsilon^p(x,t)\right), \end{aligned}$$

gdzie $F(x,t)$ opisuje gęstość sił zewnętrznych występujących w badanej sytuacji, a $\mathcal{D}$ jest tak zwanym tensorem sprężystości, który zależy od rodzaju i własności badanego materiału. Naszym celem jest znalezienie nieznanych funkcji: $u(x,t)$, $\sigma(x,t)$ i $\varepsilon^p(x,t)$. Niestety, mamy aż trzy niewiadome funkcje, a jedynie dwa równania. Aby zamknąć badany układ potrzebne jest trzecie równanie, które jest wyznaczane eksperymentalnie. Zwykle wiąże ono ze sobą $\varepsilon^p(x,t)$ i $\sigma(x,t)$ i jest postaci

$$\epsilon^p_t(x,t) \in \mathcal{G}\left(\sigma(x,t)\right).$$

Równanie to nazywane jest związkiem konstytutywnym, a funkcja $\mathcal{G}$ - funkcją konstytutywną.

Naszym celem jest zbadanie tego typu modeli i wykazanie, że dla ważnych, występujących w zastosowaniach, funkcji konstytutywnych modele te są dobrze postawione. Innymi słowy chcemy zbadać przy jakich, możliwie łatwych do sprawdzenia założeniach badane modele mają rozwiązania. Szczególnie (ale nie tylko) interesuje nas związek konstytutywny Prandtla-Reussa (model idealnej plastyczności) zaproponowany jeszcze w latach 30-tych XX wieku, dla którego dotychczasowe wyniki, otrzymane w latach 80-tych, stwierdzają istnienie rozwiązań jedynie przy trudnym do weryfikacji założeniu (tak zwanym warunku bezpiecznego obciążenia). Naszym głównym celem jest zastąpienie warunku bezpiecznego obciążenia przez łatwiejszy do sprawdzenia warunek opisujący zbiór dopuszczalnych przez materiał naprężeń. Spowoduje to, że o wiele łatwiejsza będzie weryfikacja czy dany model może być użyty w konkretnej sytuacji, gdy znamy materiał i siły do niego przyłożone. Co więcej, chcielibyśmy też pokazać istnienie bardziej regularnych rozwiązań postawionego problemu niż te znane dotychchczas. Taki wynik istotnie pogłębi zrozumienie zagadnień plastyczności, natomiast w szerszej perspektywie powinien też ułatwić stosowanie modeli idealnej plastyczności w praktyce.