

NIELINIOWE RÓWNANIA Z OPERATOREM CURL-CURL

Jarosław Mederski

Projekt badawczy poświęcony jest studiowaniu nieliniowych problemów curl-curl, które pojawiają się w elektromagnetyzmie. Po pierwsze, poszukujemy czasowo-harmonicznych rozwiązań równań Maxwella w obecności nieliniowej polaryzacji, które stanowią modele szeroko badane w fizyce i inżynierii. Nieliniowe materiały, np. ośrodki typu Kerra, materiały z efektem saturacji lub z efektami trzeciego i piątego stopnia, odgrywają ważną rolę w nanotechnologii i pozwalają uzyskać fizyczne struktury, które często są mniejsze niż długość fali światła. Takie nieliniowe struktury mają nowe i fascynujące optyczne własności, które nie mogą być modelowane przez ich liniowe odpowiedniki. Celem projektu jest badanie czasowo-harmonicznych fal elektromagnetycznych w nieliniowych ośrodkach za pomocą metod wariacyjnych oraz teorii bifurkacji. Użycie tych metod dla nieliniowego problemu curl-curl jest nowatorskie i wymaga rozwoju nowych analitycznych technik. Badamy istnienie rozwiązań w stanie podstawowym oraz w stanie związanym półliniowych równań Maxwella w obecności nieliniowości ogólnego typu, ich wielokrotność i symetryczne własności. Ponadto jesteśmy zainteresowani stanami półklasycznymi, rozwiązaniami unormowanymi, oraz układami równań z operatorem curl-curl.

Następnie, chcemy badać problemy curl-curl pojawiające się w teorii Born-Infelda. Przypomnijmy, że w latach 30-tych XX wieku, Born i Infeld skonstruowali nową teorię pola elektromagnetycznego poprzez wprowadzenie nieliniowej gęstości lagranżjanu. Z matematycznego punktu widzenia, równania Eulera-Lagrange'a w tej teorii są wielkim wyzwaniem i jest niewiele prac odnośnie tego problemu. Dzisiaj metody nieliniowej analizy wydają się wystarczająco mocne, aby dokonać rygorystycznej analizy teorii Born-Infelda. Istotnie, ostatnio elektrostatyczne rozwiązania zostały zbadane, a naszym celem jest analiza magnetostatycznych rozwiązań, gdzie pojawia się nieliniowy operator curl-curl.

Program badawczy leży na granicy następujących obszarów: metod wariacyjnych, teorii bifurkacji, równań różniczkowych cząstkowych, analizy funkcjonalnej i fizyki matematycznej. Potencjalne zastosowania oczekiwanych wyników mogą prowadzić do lepszego zrozumienia fizycznych modeli, np. nieliniowej optyki lub teorii Born-Infelda, oraz do otrzymania bardziej efektywnych numerycznych metod dla równań curl-curl. Oczekiwany wynik pracy będzie otrzymanie istnienia rozwiązań naszych problemów badawczych oraz ich wielokrotność. Ponadto zamierzamy zaangażować teorię bifurkacji dla nieliniowych problemów curl-curl, która dotychczas nie była użyta w tym kontekście. Zamierzamy rozwinąć nowe matematyczne techniki pozwalające na badanie także innych nieliniowych równań różniczkowych cząstkowych takich jak nieliniowe równania falowe lub równania Schrödingera. Standardowe metody wariacyjne i metody bifurkacji wydają się nie mieć zastosowania ze względu na silną nieokreśloność problemów. Nowe techniki są wymagane, które będą przedmiotem zainteresowań specjalistów z obszarów wyżej wymienionych. Poza tym oczekiwane wyniki dadzą początek dla dalszych badań dynamiki nieliniowego równania elektromagnetycznego zależnego od czasu w duchu pionierskich prac Cazenave, Keniga, Merle oraz Tao poświęconych nieliniowym równaniom Schrödingera oraz równaniom falowym.