Można powiedzieć, że wszystkie rozmaitości algebraiczne znajdują się pomiędzy światem obiektów ciągłych (geometria) i obiektów dyskretnych (algebra). Można je badać z obu punktów widzenia, a najlepsze efekty przynosi zwykle połączenie metod. W niniejszym projekcie chcemy zajmować się rozmaitościami, które znajdują się trochę bardziej po stronie dyskretnej – są nauralnie związane z pewnymi obiektami kombinatorycznymi, i użycie metod dyskretnych oraz obliczeniowych daje wobec nich dobre efekty. Wybraliśmy trzy tematy o tej własności.

Pierścienie Coxa rozwiązań osobliwości ilorazowych. Pierścień Coxa jest niezmiennikiem rozmaitości, który przechowuje bardzo dużo informacji o jej własnościach geometrycznych, a także o geometrii jej małych modyfikacji, czyli rozmaitości bardzo niewiele się od niej różniących. Badamy pierścienie Coxa rozwiązań, czyli wygładzeń, osobliwości ilorazowych – przestrzeni postaci $\mathbb{C}^n/G$, gdzie G jest skończoną grupą. Ze struktury pierścienia Coxa chcemy otrzymywać informacje o geometrii rozwiązań krepantnych, czyli w pewnym sensie minimalnych. W tym projekcie będziemy szukać małych zbiorów generatorów tych pierścieni – z wcześniejszych prac wynika, że takie zbiory powinny mieć dobry opis kombinatoryczny. Małe zbiory generatorów można wykorzystać między innymi do znalezienia stożka dywizorów ruchomych rozwiązania i jego podziału na mniejsze stozki, komnaty Moriego. Ta struktura kombinatoryczna opisuje relacje pomiędzy małymi modyfikacjami wybranego rozwiązania, a w wymiarze 3, który jest tematem tego projektu, nawet relacje między wszystkimi rozwiązaniami krepantnymi. Otrzymane w ten sposób wyniki byłyby istotnym wkładem w badania rozwiązań osobliwości ilorazowych. W tej tematyce od jakiegoś czasu nie ma znaczących nowych rezultatów, a do czasu użycia metod związanych z pierścieniami Coxa nie były znane nawet liczby różnych rozwiązań krepantnych dla niektórych małych grup.

Tropikalizacja z dodatkową strukturą. Tropikalizacja to metoda przypisania pewnym rozmaitościom algebraicznym struktury wachlarza w rzeczywistej przestrzeni liniowej w oparciu o waluację na ciele współczynników. Chcemy badać dwa zagadnienia związane z tym pojęciem. Pierwsze to intrygujące otwarte pytanie z pracy Sturmfelsa i Xu o klasyfikację pewnych specjalnych zbiorów generatorów, tak zwanych baz Khovanskiego, pierścienia Coxa powierzchni del Pezzo stopnia 3. Co prawda w sformułowaniu problemu tropikalizacja się nie pojawia, ale przewidujemy, że jest ona elementem rozwiązania – strukturą parametryzującą bazy Khovanskiego. Drugi problem to pytanie dotyczące bardzo podstawowych własności tropikalizacji: dla rozmaitości z działaniem grupy chcemy badać działanie tej grupy na tropikalizacji rozmaitości i jego związki z wyjściowym działaniem. Jest to bardzo szerokie zagadnienie, a każdy częściowy wynik będzie istotnym wkładem w lepsze rozumienie własności operacji tropikalizacji.

Rozmaitości związane z macierzami, działania torusa i p-dywizory. Ostatnie zagadnienie dotyczy p-dywizorów – struktur geometryczno-kombinatorycznych wprowadzonych przez Altmanna i Hausena do opisu romaitości z działaniem torusa, którego największa orbita ma wymiar mniejszy niż cała rozmaitość. P-dywizor składa się z obiektów geometrycznych (dywizorów), którym przypisuje się współczynniki będące wielościanami o wierzchołkach w pewnej kracie związanej z torusem. Jak dotąd niewiele przykładów p-dywizorów zostało opisanych w literaturze, te istniejące należą do dwóch klas. Chcemy szukać nowych przykładów wśród rozmaitości, których definicja zależy od wyboru macierzy (permutacji) lub ciągu grup macierzowych: macierzowych rozmaitości Schuberta, rozmaitości Kazhdana-Lusztiga i rozmaitości Botta-Samelsona. Przypuszczamy, że kombinatoryka współczynników wielościennych p-dywizora powinna wyrażać się jakoś w terminie własności macierzy (lub grup macierzowych) określających rozmaitość. Te badania powinny dostarczyć przykładów p-dywizorów istotnie innych niż opisane dotychczas, a ponadto mamy nadzieję, że znajomość dużej grupy przykładów zainicjuje nowy projekt w tej tematyce – albo wykorzystujący kombinatorykę do lepszego poznania p-dywizorów, albo wykorzystujący p-dywizory w projektach bliżej związanych z kombinatoryką.