Deformacje i degeneracje rozmaitości algebraicznych

Streszczenie popularnonaukowe

Piotr Achinger
Instytut Matematyczny Polskiej Akademii Nauk

Proponowane badania należą do geometrii algebraicznej, z zastosowaniami do arytmetyki. Geometria algebraiczna bada zbiory rozwiązań układów wielomianowych, zwane rozmaitościami algebraicznymi. Klasyczna teoria skupia się na rozmaitościach nad ciałem liczb zespolonych, jednak z punktu widzenia teorii liczb i arytmetyki, najważniejsze są rozmaitości nad ciałem liczb wymiernych oraz nad ciałami skończonymi. W naszym projekcie planujemy badać zarówno rozmaitości zespolone jak i te w dodatniej charakterystyce, łącząc techniki topologii i geometrii algebraicznej.

Celem niniejszego projektu jest badanie rodzin rozmaitości algebraicznych, czyli mówiąc opisowo wariację rozmaitości zależną od parametru t. Rodziny są użyteczne z różnych punktów widzenia:

- Mając dany układ, można *zdegenerować* go do szczególnego włókna. Operacja ta niekiedy niszczy część struktury, a wtedy włókno staje się przystępniejszym obiektem niż obiekt początkowy. Na przykład trójkąt można zdegenerować do odcinka.
- Stosując wyżej opisanę degenerację można z obiektu geometrycznego (rozmaitości nad ciałem liczb zespolonych) stworzyć zdegenerowane obiekty arytmetyczne (rozmaitości nad ciałami skończonymi) i badać je metodami arytmetyki i geometrii arytmetycznej.
- Mając dany obiekt szczególny X_0 można szukać rodziny, która zawiera go jako włókno szczególne. Znalezienie takiej (zwykle niejednoznacznej) rodziny pozwala zastosować np. metody analizy matematycznej. Nie dla wszystkich X_0 odpowiednie rodziny istnieją, a przeszkody do istnienia takiej rodziny dają wgląd w patologie układu X_0.

Konkretne cele projektu są pokrótce opisane poniżej.

Geometria logarytmiczna jest kluczowym narzędziem w badaniu degenerujących się rodzin. Planujemy zastosować ją do zrozumienia topologii odwzorowań algebraicznych.

Teoria deformacji w dodatniej charakterystyce. Rozmaitości Calabi–Yau służą za modele ukrytych wymiarów czasoprzestrzeni w teorii strun, a symetria lustrzana jest pewnym hipotetycznym lecz matematycznie ścisłym dualizmem pomiędzy takimi rozmaitościami. Aby zastosować idee symetrii lustrzanej w geometrii arytmetycznej, potrzebne jest zrozumienie deformacji takich rozmaitości nad ciałami skończonymi oraz kiedy takie rozmaitości "pochodzą" z charakterystyki zero. Równocześnie, jednym z celów jest **konstruowanie nowych niepodnoszalnych schematów**, czyli obiektów geometrycznych "żyjących" tylko w dodatniej charakterystyce.