Streszczenie

Głównym celem projektu jest badanie pewnych własności obiektów algebraicznych (grup) poprzez ich analityczne realizacje (reprezentacje). Obiekty algebraiczne często kojarzymy z ze światem dyskretnym, sztywnym z natury, natomiast funkcje i operatory rozumiemy jako obiekty w pewnym sensie elastyczne. Własność (T) Kazhdana stanowi pewien most pomiędzy tymi światami: operatory działające na przestrzeni Hilberta reprezentujące grupą spełniają pewien (analityczny) warunek sztywności. Grupę posiadającą własność (T) można również (równoważnie) scharakteryzować następującym warunkiem: każde działanie izometryczne tej grupy na przestrzeni Hilberta posiada punkt stały.

Chociaż oryginalna definicja Kazhdana używała języka unitarnych reprezentacji nieprzywiedlnych grupy, często można udowodnić własność (T) bez ich znajomości. Można ją wywnioskować np. ze spektrum (różniczkowego) operatora Laplace'a rozmaitości o grupie podstawowej mającej tą własność. Własność (T) jest również powiązana ze spektrum (algebraicznego – grupowego) operatora Laplace'a, co umożliwia podejście czysto algebraiczne: istnienie dodatniego rozwiązania pewnego układu równań (i nierówności) w algebrze grupowej jest warunkiem równoważnym własności (T). Dzięki temu połączeniu analityczna sztywność grupy może zostać sprawdzona w terminach algebraicznych.

W ramach tego projektu chcemy podejść do własności (T) dla dyskretnych grupach skończenie prezentowalnych w sposób obliczeniowy. Używając algebraicznej reformulacji można stworzyć program matematycznej optymalizacji (nieujemnie określonej – *semi-definite programming*), którego rozwiązanie będzie przybliżać doskonałe (matematycznie) rozwiązanie układu równań określających własność (T). W szukaniu rozwiązania tego problemu optymalizacyjnego pomocne stają się komputery: istnieje wyspecjalizowane oprogramowanie szukające rozwiązań takich problemów, zapisanych w odpowiednim języku. Dodatkowo metoda obliczeniowa pozwala uzyskać informacje o *stałej Kazhdana*, która jest ilościowym odpowiednikiem własności (T). Ponieważ teoretyczne wyznaczanie wartości tej stałej jest trudnym zadaniem, wiadomo bardzo niewiele o jej wartości nawet dla relatywnie prostych grup. Zaproponowana metoda obliczeniowa jest jedyną znaną metodą, która pozwala uzyskiwać dobre szacowania stałych Kazhdana z dołu dla niezbyt skomplikowanych grup. W niektórych przypadkach ($SL(n,\mathbb{Z})$ dla $n \leqslant 6$) nasze wyniki uzyskane przy pomocy tej metody pozwalają precyzyjnie określić *rząd wielkości* stałej Kazhdana.

Wyniki projektu znajdą zastosowania w obliczeniowej teorii grup, konstrukcji ekspanderów, geometrycznej teorii grup i innych dziedzinach.