Stabilność profili wybuchów dla równania Fujity - Streszczenie popularnonaukowe

Równania różniczkowe cząstkowe są podstawowym narzędziem matematycznego opisu otaczającego nas świata fizycznego. Wiele z fundamentalnych zjawisk fizycznych jest wyrażona właśnie w ich języku. W największych skalach spotykamy równania ogólnej teorii względności Einsteina, a w najmniejszych równania mechaniki kwantowej takie jak np. równanie Schrödingera. Pomiędzy, w skalach pośrednich, równania cząstkowe modelują zjawiska takie jak np. transport ciepła, rozchodzenie się fal czy przepływ cieczy.

Prawdopodobnie najsłynniejszym równaniem cząstkowym jest równanie Naviera-Stokesa opisujące przepływ nieściśliwej cieczy. Jest ono jednym z najprostszych przykładów tzw. półliniowego parabolicznego równania różniczkowego cząstkowego. Jest to ważna rodzina modeli zawierająca m.in. modele reakcji dyfuzji o szerokich zastosowaniach w fizyce, biologii czy ekonomii. Zawarty w nich element nieliniowy sprawia, że w przeciwieństwie do modeli liniowych możliwe jest pojawienie się osobliwości w skończonym czasie, czyli sytuacji, w której rozwiązanie osiągnie w pewnej chwili czasu wartości nieskończone. Po *sensownym* modelu przepływu wody spodziewamy się, że nie będzie przewidywał nieskończonej prędkości. Pomimo kilku dziesięcioleci intensywnych starań i od niedawna zachęty finansowej w postaci 1000 000 dolarów od fundacji Claya to, czy równanie Naviera-Stokesa jest w tym znaczeniu sensowne czy nie pozostaje otwarte.

Technicznie, podstawową przeszkodą na drodze do wykluczenia osobliwości jest tzw. *nadkrytyczność*. Wszystkie parametry, które potrafimy kontrolować (np. energia) są nadkrytyczne względem naturalnego skalowania równania co w praktyce oznacza tyle, że są nieprzydatne w opisie przepływu w mikroskali. A tam przecież osobliwość też może się ukrywać. Nadkrytyczność jest szerszym fenomenem i często pojawia się tam gdzie modelujemy bardzo niestabilne zjawiska takie jak np. turbulencja. Jest jednak jeszcze gorzej - nie potrafimy okiełznać nadkrytyczności nawet w równaniach formalnie dużo prostszych takich jak np. równanie Fujity zaproponowane w latach 60' jako uproszczony model tego "co może pójść nie tak" w równaniu Naviera-Stokesa. Jeżeli nauczymy się pracować z nadkrytycznością w równaniu Fujity uzyskamy też ważny wgląd w subtelności analizy innych modeli nadkrytycznych.

Celem projektu jest stworzenie nowych technik matematycznych pozwalających na wykluczenie lub wskazanie warunków występowania tzw. wybuchów typu II dla równania Fujity. Są to subtelne i wysoce niestabilne zjawiska nadkrytyczne względem symetrii skalowania, które mogą stać m.in. za potencjalnym wybuchem w równaniu Naviera-Stokesa. Badanie takich osobliwości wymaga ostrych, dedykowanych narzędzi. Równanie Fujity służy tutaj jako idealny obiekt do testowania hipotez i dostrajania technik pracy z osobliwościami tego typu dla równań półliniowych. W latach 80' Giga i Kohn pokazali, że w pewnych przypadkach wybuch typu II można wykluczyć poprzez wykorzystanie symetrii skalowania równania do stworzenia układu odniesienia, w którym potencjalna osobliwość ma profil, który nie ma prawa istnieć. Skuteczność tej techniki kończy się jednak tam, gdzie nie można przywołać argumentu o nieistnieniu, bo wiadomo, że profile tego typu istnieją. Główną ideą przedstawionego tu projektu jest (tam gdzie to konieczne) zastąpienie argumentu o nieistnieniu argumentem o niestabilności tj. wykazanie, że choć profil wybuchu może istnie, to osobliwość o takim kształcie się nie wydarzy bo jego niestabilność nie pozwala rozwiązaniu się do niego zbliżyć.

Zaproponowane podejście opiera się na aspekcie uniwersalnym, którego założenia i metody można następnie zaadaptować do teorii innych równań, oraz na aspekcie szczególnym, w którym konkretna postać równania wnosi konkretne dane do ogólnego schematu analizy. Aspekt uniwersalny polega na wykorzystaniu rozważań strukturalnych (symetrii równania) do zdefiniowania obiektów matematyczych pozwalających na opisanie możliwych osobliwości rozwiązania. Aspekt szczególny wnosi konkretną postać takiego obiektu właściową dla zadanego równania.