Operatory Toeplitza i Hankela pomiędzy różnymi przestrzeniami Hardy'ego

W przedstawionym projekcie zamierzamy kompleksowo zbadać operatory Toeplitza i Hankela działające między różnymi przestrzeniami. Aby wyjaśnić na czym polega idea naszego projektu, przypomnijmy, że macierz Toeplitza ma postać

$$\begin{bmatrix} a_0 & a_{-1} & a_{-2} & \cdots \\ a_1 & a_0 & a_{-1} & \cdots \\ a_2 & a_1 & a_0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix},$$

natomiast macierz Hankela to

$$\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \cdots \\ a_2 & a_3 & a_4 & \cdots \\ a_3 & a_4 & a_5 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix},$$

gdzie $(a_n)_{n=-\infty}^{\infty}$ to ciąg liczb zespolonych. Z drugiej strony, niech H^2 będzie przestrzenią Hardy'ego-Hilberta (nad okręgiem jednostkowym $\mathbb{T}$). Okazuje się, że każdy ograniczony operator, którego reprezentacja macierzowa (względem standardowej bazy w H^2) jest macierzą Toeplitza lub Hankela, daje się zapisać jako

$$T_a : f \mapsto PM_a f \quad \text{lub} \quad H_a : f \mapsto PM_a J f, \tag{1}$$

odpowiednio, gdzie M_a jest operatorem mnożenia przez funkcję $a \in L^\infty$ (a nazywamy symbolem operatorów T_a, H_a i M_a), P jest klasyczną projekcją Riesza (tj. $P = (I+H)/2$, H oznacza transformatę Hilberta), natomiast operator J dany jest wzorem $Jf(t) = t^{-1}f(t^{-1})$ dla $t \in \mathbb{T}$. Ponadto odpowiedni ciąg (a_n) jest ciągiem współczynników Fouriera symbolu a. Operator T_a nazywamy operatorem Toeplitza, podczas gdy H_a to operator Hankela.

Operatory tego typu odgrywają bardzo ważną rolę w teorii operatorów i analizie harmonicznej, a początki systematycznych badań nad nimi sięgają połowy poprzedniego wieku (szczególne przypadki, jak na przykład macierz Hilberta, która jest macierzą Hankela, pojawiały się oczywiście wcześniej). Ich własności są kompleksow zbadane, a literatura na ich temat zawiera tysiące publikacji dotyczących zarówno przypadku klasycznego, jak i uogólnień w wielu kierunkach. Niemniej, we wszystkich (prawie) tych przypadkach operatory takie występują w kontekście algebraicznym, tzn. działają z jednej, do tej samej przestrzeni. **Celem naszego projektu jest rozszerzenie tych rozważań do ogólnej sytuacji, gdy operatory działają między różnymi przestrzeniami.** Taki punkt widzenia pozwala na dopuszczenie funkcji nieograniczonych jako symboli operatorów Toeplitza i Hankela.

W projekcie chcemy, zarówno odpowiedzieć na klasyczne pytania przeniesione ze znanej teorii operatorów, jak i rozważyć problemy, które w przypadku algebraicznym nie miały racji bytu. Chcielibyśmy jednak podkreślić, że celem projektu nie jest uogólnianie znanych wyników, lecz raczej poszukiwanie nowych, interesujących zjawisk, które powinny się pojawić gdy dopuścimy szerszą klasę funkcji, jako symboli operatorów Toeplitza i Hankela. Mamy zamiar rozważać jak najogólniejszą klasę przestrzeni Hardy'ego, jednak wyniki tego typu będą nowe nawet dla przypadku klasycznych przestrzeni H^p. Będziemy korzystali z metod analizy funkcjonalnej, harmonicznej i zespolonej oraz teorii operatorów, jednak duże znaczenie odegra także teoria interpolacji, czy teoria przestrzeni funkcyjnych. Ponadto, będziemy zmuszeni wypracować szereg nowych metod, które zastąpią metody algebraiczne z klasycznej teorii operatorów Toeplitza i Hankela. Liczymy, że taki punkt widzenia i wypracowane metody zainspirują też analogiczne badania dla innych typów operatorów, które do tej pory skupiały się na przypadku algebraicznym.