

## KOMBINATORYKA WIELOMIANÓW SYMETRYCZNYCH

Matematyka stała się na przestrzeni wieków niezwykle wyspecjalizowaną dziedziną i wiele obecnych badań mieści się całkowicie w malutkim fragmencie świata matematycznego dostępnym jedynie ekspertom. Co jakiś czas matematycy odkrywają jednak obiekty i idee które w zaskakujący sposób scalają te pofragmentowane i pozornie oddalone od siebie dziedziny matematyki. **Wielomiany symetryczne** stanowią przykład takiego obiektu. Ich definicja jest bardzo prosta – są to wielomiany, które nie zmieniają się gdy zamienimy ich zmienne miejscami. Na przykład:

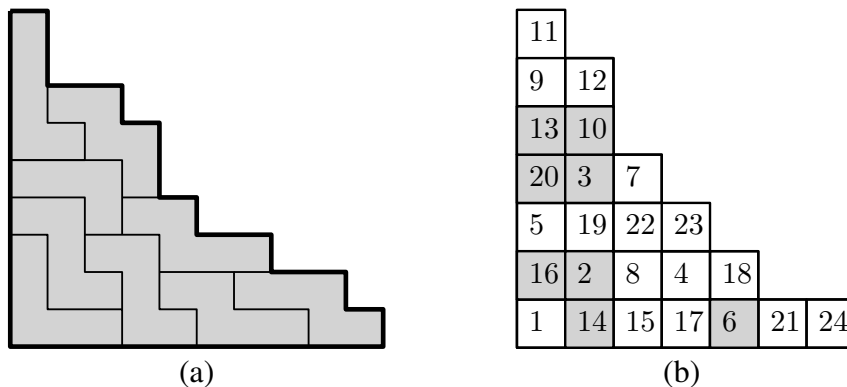
$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, x_3) &:= x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 = f(x_1, x_3, x_2) = f(x_2, x_1, x_3) \\ &= f(x_2, x_3, x_1) = f(x_3, x_1, x_2) = f(x_3, x_2, x_1) \end{aligned}$$

jest wielomianem symetrycznym, lecz wielomiany

$$f(x_1, x_2, x_3) := 2x_1 + x_2 + x_3 \neq 2x_2 + x_1 + x_3 = f(x_2, x_1, x_3)$$

nie są. Okazało się że niektóre wielomiany symetryczne są zaskakująco wyjątkowe – **w naturalny sposób pojawiają się one w wielu dziedzinach matematyki i fizyki**, a ich piękna i bogata struktura była przyczynkiem ważnych odkryć w tych dziedzinach nauk. Można więc zapytać – *dlaczego ich struktura algebraiczna jest taka wyjątkowa? Co czyni je obiektami naturalnie występującymi w tak wielu dziedzinach nauki?*

Jedną z możliwych odpowiedzi na to pytanie brzmi: *wszystkie te wielomiany mają wspólną cechę – można opisać ich struktury przy użyciu bardzo konkretnych obiektów. Badając wzorce i reguły rządzące tymi obiektami poznajemy strukturę tych wielomianów.* O jakich obiektach jest tutaj mowa? Spójrzmy na przykłady: Rysunek 1(a) przedstawia parkietaż pewnego schodkowego kształtu płytkami rozmiaru 5 o kształcie cienkich pasków. Inny przykład przedstawiony jest na Rysunku 1(b). Widzimy tam wypełnienie “schodkowego” kształtu liczbami 1, 2, ..., 24 w taki sposób, że w pierwszym, drugim, czwartym i piątym rzędzie naszego kształtu znajdziemy *inwersję*, czyli parę liczb taką, że liczba po lewej stronie jest większa. Badając takie obiekty nasuwają się naturalne pytania: *na ile sposobów możemy ułożyć parkietaż zadanego kształtu “schodkowego” płytkami rozmiaru 5 o kształcie cienkich pasków? Na ile sposobów możemy wypełnić zadany kształt “schodkowy” kolejnymi liczbami naturalnymi tak, aby w pierwszym, drugim, czwartym i piątym rzędzie naszego kształtu była inwersja?* Dziedzina matematyki, która odpowiada na takie pytania i bada takie skończone konfiguracje oraz prawidła nimi rządzące nazywana jest **kombinatoryką**. **Kombinatoryka algebraiczna** jest dziedziną, która wykorzystuje obiekty i metody kombinatoryczne aby opisać pewne abstrakcyjne, algebraiczne struktury, np. strukturę wielomianów symetrycznych.



Rysunek 1. Rysunek 1(a) przedstawia parkietaż “schodkowego” kształtu cienkimi płytkami rozmiaru 5. Rysunek 1(b) przedstawia wypełnienie “schodkowego” kształtu liczbami 1, 2, ..., 24 i niektóre inwersje zaznaczone są na szaro.

Głównym celem tego projektu jest **odkrycie i zbadanie kombinatorycznych struktur** podobnych do opisanych powyżej, oraz **wykorzystanie ich do wyjaśnienia niezwykłych i tajemniczych własności pewnych szczególnych wielomianów symetrycznych**. Opisane wyniki planujemy zastosować **w różnych, pozornie odległych od siebie dziedzinach matematyki**.