Radykały produktów skrzyżowanych uniwersalnych algebr obwiednich algebr Liego i wymiary podalgebr algebr macierzy

Streszczenie popularnonaukowe

Wszystkie poniżej wspomniane pierścienie i algebry, jeśli nie zakłada się inaczej, są łączne.

Algebry macierzy o współczynnikach pochodzących z pierścienia z dzieleniem lub z ciała, są jednym z najważniejszych obiektów w matematyce. Ważność i wielość miejsc, w których algebry $M_n(K)$ występują we współczesnej nauce jest powszechnie znana. Można tu przywołać choćby następujące: teoria grafów, analiza i geometria, teoria prawdopodobieństwa i statystyka, symetrie i transformacje w fizyce, liniowe kombinacje stanów kwantowych, medycyna, ekonomia.

Dobrze znane fakty mówią, że każda skończenie wymiarowa algebra łączna A jest produktem prostym algebr macierzy z dokładnością do "złej" części zwanej radykałem A (jest to maksymalny nilpotentny ideał A). Dokładniej, jeśli radykał A oznaczymy przez $\mathrm{rad}(A)$, to algebra ilorazowa $A/\mathrm{rad}(A)$ jest izomorficzna z produktem prostym macierzy nad pierścieniami z dzieleniem. Ten piękny wynik jest motywacją do pewnego ważnego nurtu badań pierścieni łącznych i nieskończenie wymiarowych algebr łącznych. Okazuje się, że jeśli nie zakładamy że pracujemy ze skończenie wymiarową algebrą łączną, pojawia się wiele rodzajów patologii dotychczas niewystępujących. Ta sytuacja prowadzi do zdefiniowania, w ogólnym przypadku, wielu rodzajów radykałów.

Podczas trwania projektu będziemy badać produkty skrzyżowane (nie ma dobrego tłumaczenia terminu angielskiego "crossed product") uniwersalnych algebr obwiednich algebr Liego. Dokładniej, rozważać będziemy algebry Liego L, ich uniwersalne algebry obwiednie $U(L)$ (są to algebry łączne) i pierścienie łączne R. Dalej, interesować nas będzie algebra łączna - oznaczana przez $R * U(L)$ i nazywana produktem skrzyżowanym $U(L)$ - w definicji, której istotną rolę odgrywa fakt, mówiący, że $U(L)$ działa na R poprzez różniczkowania. Specjalnymi przykładami wspomnianych struktur są algebry Weyl'a oraz pierścienie wielomianów z różniczkowaniem.

Proponowany projekt jest podzielony na dwie części i obecnie chcielibyśmy omówić drugą z nich.

Głównym obiektem naszych zainteresowań omawianych w tej części, będą podalgebry algebry macierzy $M_n(K)$, nad ciałem K.

Dla wspomnianych klas algebr interesujące nas obiekty, czyli podalgebry, badane będą z punktu widzenia pewnych niezmienników, głównie myślimy tu o wymiarze przestrzeni liniowej. Proponowane badania dotyczą podalgebr spełniających pewne tożsamości wielomianowe, co wpisuje się w szeroki nurt badań tak zwanych PI algebr. W konwencji streszczenia popularnonaukowego możemy powiedzieć, że będziemy szukać podalgebr A spełniających z góry zadane równanie

$$f(x_1,\ldots,x_m) = 0, \text{ gdzie } f(x_1,\ldots,x_m) \text{ jest wielomianem nad } K \text{ z nieprzemiennymi zmiennymi,}$$

czyli wymagamy aby dla dowolnych $a_1,\ldots,a_m \in A$ zachodziło $f(a_1,\ldots,a_m) = 0$. Chcąc podać przykład, możemy odwołać się do równania $xy - yx = 0$ i zauważyć, że prowadzi nas ono do pytania o podalgebry przemienne. Jeśli rozpatrzymy algebrę $M_2(\mathbb{Q})$, to łatwo można sprawdzić, że jej podalgebra

$$A = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & a \end{bmatrix} : a, b \in \mathbb{Q} \right\}$$

spełnia $xy - yx = 0$. Zauważmy, że wymiar A nad $\mathbb{Q}$ jest równy 2. Znane są wyniki (Schur, Jacobson, dla dowolnego n i $M_n(K)$), z których wynika, że w przypadku podalgebr algebry $M_2(K)$, spełniających $xy - yx = 0$, wymiar większy być nie może.

Jako, że wymiar algebry $M_n(K)$ nad K jest równy n^2, każda podalgebra $M_n(K)$ ma wymiar skończony. Naszym celem będzie znalezienie pewnych funkcji zależnych w jakiś sposób od n i od z góry zadanej tożsamości $f = 0$, dla których to funkcji ich wartości dostarczą nam informacji o maksymalnym możliwym wymiarze podalgebr A algebry $M_n(K)$ spełniających $f = 0$.