Geometria pewnych powierzchni K3 z wieloma krzywymi wymiernymi

popularnonaukowe streszczenie projektu

Cel projektu

Projekt jest poświęcony geometrii algebraicznej. Chcemy ustalić maksymalną możliwą liczbę linii na sekstykach (odp. oktykach), które są powierzchniami $K3$. Ponadto chcemy znaleźć równania zadające wszystkie takie powierzchnie, które zawierają dużo linii. Nie zawężamy naszej uwagi tylko do zespolonych powierzchni gładkich, ale chcemy także badać powierzchnie z punktami osobliwymi i powierzchnie zdefiniowane nad ciałami charakterystyki dodatniej.
Innym celem projektu jest konstrukcja powierzchni $K3$ stopnia 4 z wieloma gładkimi krzywymi wymiernymi stopnia d, gdzie $d \geqslant 2$. Idea konstrukcji polega na rozpatrywaniu powierzchni Kummera powierzchni abelowej (w uproszczeniu: rozpatrujemy dwuwymiarowy torus, sklejamy pary punktów antypodalnych do jednego punktu, usuwamy szesnaście ostrzy na tak otrzymanej powierzchni i wklejamy w miejsce każdego z nich linię i otrzymujemy powierzchnię Kummera) i badaniu wiązek na powierzchni Kummera. Jeżeli wyjściowa powierzchnia abelowa ma dużo symetrii, to uzyskana powierzchnia Kummera zawiera dużo krzywych. Niektóre z tych krzywych są gładkimi krzywymi wymiernymi stopnia d. Do rozpoznania szukanych krzywych stosuje się abstrakcyjne techniki nowoczesnej geometrii algebraicznej.

Powody podjęcia danej tematyki badawczej

Można wykazć, że nie istnieją ogólne wzory na pierwiastki wielomianów wysokiego stopnia. Przez wieki matematycy próbowali pokonać ten problem badając własności zbiorów rozwiązań układów równań wielomianowych. W szczególności, dla pewnych wymiarów geometrzy algebraiczni zdołali podzielić zbiory rozwiązań na różne klasy zbiorów o podobnych własnościach. Jedną z takich klas są powierzchnie $K3$.

Powierzchnie $K3$ można postrzegać jako dwuwymiarowe analogony krzywych eliptycznych, Są one również obiektem zainteresowania fizyków teoretycznych (jako rozmaitości Calabi-Yau niskiego wymiaru). Spośród gładkich powierzchni $K3$ tylko trzy rodzaje można uzyskać jako przecięcia właściwe w przestrzeni rzutowej. Są to kwartyki, sekstyki i oktyki. Geometria kwartyk z wieloma liniami jest już w tej chwili dość dobrze zrozumiana. Główny postęp na tym polu miał miejsce w ciągu ostatnich pięciu lat. Chociaż część wyników uzyskano za pomocą komputerowo wspomaganych obliczeń symbolicznych, większość ciekawych faktów wykazano drogą dedukcji wspartej aparatem geometrii algebraicznej i algebry. Kwartyki mają jedną własność, która ułatwia prowadzenie rozumowań: są zadane jednym równaniem. W projekcie chcemy uzyskać analogiczne wyniki dla pozostałych dwóch naturalnych klas powierzchni $K3$. Sekstyki i oktyki nie są hiperpowierzchniami, co stanowi dodatkową trudność. Ponadto chcemy także studiować powierzchnie z osobliwościami.

Nasze zainteresowaniem jawnymi przykładami i znajdowaniem równań jest motywowane faktem, że powierzchnie z wieloma liniami mogą być wykorzystane do konstruowania różnych obiektów matematycznych o nieoczekiwanych własnościach. Dlatego takie dobrze zrozumiane przykłady powierzchni o specjalnych własnościach są bardzo cenne przy sprawdzaniu hipotez i szukaniu nieoczekiwanych zależności między różnymi obiektami matematycznymi.

Badania realizowane w projekcie

Zamierzamy stosować różne techniki geometrii algebraicznej. Jedną z idei jest zastąpienie badanej powierzchni $K3$ hiperpowierzchnią tak aby dało sie odczytać własności oryginalnej powierzchni z geometrii hiperpowierzchni. Inną techniką jest zmiana ciała bazowego, czyli zastąpienie rozpatrywanego zbioru liczb mniejszym zbiorem tak, aby pewne abstrakcyjnie zdefiniowane własności zbioru rozwiązań nie uległy zmianie. W niektórych przypadkach użyjemy także obliczeń symbolicznych wspomaganych komputerowo.

Częścią projektu jest analiza różnicy między maksymalną liczbą linii którą obliczymy, a szacowaniem danym przez nierówność Miyaoki-Yau-Sakai. Jest to spowodowane naszym zainteresowniem ogólnymi wynikami o liczbach linii/krzywych wymiernych na powierzchniach rzutowych.