

Streszczenie popularnonaukowe projektu:

Otwarte problemy teorii waluacji w charakterystyce dodatniej

Projekt badawczy połączony jest z dwoma głębokimi i otwartymi od wielu lat problemami w matematyce. Pochodzą one z dwóch zupełnie różnych dziedzin: geometrii algebraicznej i logiki matematycznej. Geometria algebraiczna bada układy równań wielomianowych. Te z kolei pojawiają się w różnego rodzaju problemach naukowo-technologicznych mających wpływ na nasze codzienne życie. Na przykład w prognozowaniu pogody wykorzystuje się duże układy równań różniczkowych, które oparte na równaniach wielomianowych. Podobnie przy symulacjach testujących bezpieczeństwo samochodów. W symulacjach tych pojawiają się jednak problemy, a ich główną przyczyną są tak zwane „osobliwości”. Są to punkty w których rozwiązania układu nie zależą bezpośrednio od ich parametrów początkowych. A takich chaotycznych zachowań chcielibyśmy uniknąć prognozując pogodę.

Wielu bardzo dobrych matematyków pracowało nad desyngularyzacją (usunięciem osobliwości), to znaczy, nad przekształceniem danego układu do nowego układu, w którym osobliwości nie występują. W 1964 roku Heisuke Hironaka uzyskał desyngularyzację w szczególnym przypadku („charakterystyki zero”). Jego praca została uhonorowana medalem Fieldsa (odpowiednik nagrody Nobla dla matematyków). Od tego czasu jest on znaną osobistością w japońskim społeczeństwie, które jest zainteresowane nauką i ją docenia. Wiele prób rozwiązania problemu desyngularyzacji w pozostałym przypadku („charakterystyki dodatniej”) zostało podjętych, jednak problem ten jest na dzień dzisiejszy wciąż otwarty.

Jeśli nie można rozwiązać problemu globalnie, można spróbować rozwiązać go lokalnie usuwając jedną, wybraną osobliwość w danym momencie. Problem ten nazywa się „lokalną uniformizacją”. Trzeba jednocześnie śledzić co się dzieje z osobliwością przy transformacji. Oscar Zariski, nauczyciel Hironaki, zaproponował aby zrobić to za pomocą „waluacji”. Udowodnił on w 1940 roku, że lokalna uniformizacja jest możliwa w przypadku charakterystyki 0. Wciąż nie wiemy, czy jest ona możliwa w charakterystyce dodatniej.

W logice matematycznej ważnym problemem jest problem „rozstrzygalności” pewnych struktur matematycznych. Oznacza to istnienie algorytmu, który może rozstrzygnąć, czy dane zdanie sformułowane w języku należącym się do danej struktury jest prawdziwe, czy nie. Liczby rzeczywiste i zespolone są rozstrzygalne, ale pewne struktury związane z teorią liczb – już nie. Teoria liczb bada liczby pierwsze, a z każdą liczbą pierwszą związana jest „waluacja p-adyczna” i „ciała liczb p-adycznych”. W 1965 roku James Ax, Simon Kochen i Yuri Ershov wykazali, że ciała liczb p-adycznych są rozstrzygalne. W ich pracy pojawiła się jednak inna struktura z waluacją, charakterystyki dodatniej, dla której problem rozstrzygalności jest do dnia dzisiejszego otwarty.

Głównym obszarem zainteresowań badawczych autora wniosku jest teoria waluacji. Problemy lokalnej uniformizacji i rozstrzygalności mogą początkowo wydawać się zupełnie niezwiązane. Autor wniosku wykazał w swojej pracy, że teoria waluacji łączy oba te problemy, a przeszkodą stojącą na drodze do ich rozwiązania jest tak zwany „defekt”. Przez szczegółowe badania i rzetelne opracowanie zjawiska defektu autor wniosku chciałby przyczynić się do rozwiązania opisanych dwóch bardzo ważnych problemów. Ważnym komponentem tego projektu jest zbudowanie międzynarodowej sieci współpracy między młodymi matematykami i ekspertami.