Teoria funkcji harmonicznych jest, jako jeden z klasycznych działów analizy matematycznej i całej matematyki, badana od ponad dwóch stuleci. Funkcje harmoniczne są prototypem rozwiązań tzw. równań różniczkowych cząstkowych typu eliptycznego i występują w wielu zastosowaniach, w tym w teorii przepływu ciepła (rozkład temperatury), układach dynamicznych (i teorii fraktali), teorii elastyczności, mechanice kwantowej i procesach stochastycznych (związanych z analizą giełdową). Pojęcie funkcji harmonicznych zostało uogólnione na różne sposoby a częścią tego projektu są dwa rodzaje takich uogólnień. Pierwsze z nich to funkcje harmoniczne zdefiniowane poprzez własność wartości średniej na przestrzeniach metrycznych z miarą. Taka własność orzeka, że wartość funkcji w danym punkcie jest równa całce z tej funkcji po danej kuli podzielonej przez miarę tej kuli. Przestrzeń jest metryczna jeżeli możemy mierzyć odległości między punktami tej przestrzeni, np.: metryka euklidesowa, taksówkowa czy riemannowska (występująca w fizyce). Badania nad harmonicznością w ogólności przestrzeni metrycznych z miarą umożliwiają zunifikowanie różnych podejść do funkcji harmonicznych oraz porównanie różnych definicji oraz wyekstrahowanie istotnych własności takich funkcji. Wśród zagadnień projektu wymieńmy badania nad brzegowym zachowaniem funkcji harmonicznych, zagadnienia istnienia funkcji harmonicznej z zadanymi danymi brzegowymi. Będziemy również badać funkcje harmoniczne na grafach i drzewach. Ponadto, zbadamy związki między harmonicznością a równaniami różniczkowymi w kontekście istotnych przykładów przestrzeni metrycznych z miarą, które występują w teorii sterowania i cybernetyce (są to tzw. grupy Heisenberga oraz ich uogólnienia).

Innym uogólnieniem funkcji harmonicznych są przekształcenia harmoniczne i p-harmoniczne. Takie przekształcenia są związane z rachunkiem wariacyjnym i zagadnieniem minimalizacji pewnych rodzajów energii zdefiniowanych poprzez uogólnione nachylenie wykresu funkcji. Poza ciekawymi teoretycznymi zastosowaniami, przekształcenia p-harmoniczne występują w badaniach deformacji obiektów, glacjologii oraz w modelach wzrostu gwiazd w astrofizyce. W projekcie będziemy zainteresowani odpowiedziami na pytania, w rodzaju: jak gładkie mogą być przekształcenia p-harmoniczne? Czy istnieją nietrywialne przekształcenia tego rodzaju w zależności od krzywizny przestrzeni, w którą odwzorowują te przekształcenia? Na te i inne pytania będziemy poszukiwać odpowiedzi zakładając, że obraz przekształcenia należy do przestrzeni metrycznej z miarą jednego z dwóch następujących rodzajów. W pierwszym rodzaju przestrzeni możemy, używając krzywych, zdefiniować trójkąty, które w sensie odległości są cieńsze niż ich klasyczne odpowiedniki na płaszczyźnie. Drugi rodzaj przestrzeni jest uogólnieniem rozmaitości Riemannowskich o krzywiźnie ograniczonej od dołu.

W ostatniej części projektu zajmiemy się klasą przekształceń, które uogólniają przekształcenia konforemne, tzn. takie, które zachowują kąty między krzywymi. Nasze ugólnienia mają tę własność, że mogą deformować kule w ograniczony sposób, np.: nie mogą ich spłaszczyć. Dla takich przekształceń będziemy poszukiwać narzędzi, które umożliwią nam charakteryzację tych przekształceń. Podobne narzędzią są znane dla przekształceń konforemnych. Badania przeprowadzimy m.in. w grupach Heisenberga.

Nasze badania przyniosą nowe spojrzenie na pojęcie harmoniczności oraz rozwiną nowe narzędzia do analizy funkcji harmonicznych i ich uogólnień dla różnych ogólnych typów przestrzeni, w tym dla istotnych przykładów przestrzeni badanych w matematyce stosowanej i fizyce. Teoria przekształceń mówi nam, jak pod ich wpływem zmienia się kształt deformowanych obiektów oraz ich geometria. Nasze badania pogłębią zrozumienie teorii przekształceń.