

W naszym projekcie zajmiemy się silnymi klikami w grafach. Problem ten jest powiązany z silnym kolorowaniem krawędzi grafu. Naszym głównym celem jest przybliżenie się do rozwiązania hipotezy postawionej w 1985 r. przez Erdős'a i Nešetřil'a. Dotyczy ona górnego oszacowania wartości silnego indeksu chromatycznego grafów o zadanym maksymalnym stopniu.

Grafem G nazywamy parę dwóch zbiorów. Pierwszy (ozn. $V(G)$) nazywany jest *zbiorem wierzchołków* grafu, drugi natomiast (ozn. $E(G)$) *zbiorem krawędzi* grafu. Każda krawędź składa się z dwóch różnych wierzchołków - mówimy, że jest do nich *incydentna*. Wierzchołki, które należą do tej samej krawędzi nazywamy *sąsiadującymi*. *Stopniem wierzchołka* v (ozn. $\deg(v)$) nazywamy liczbę krawędzi, które są do niego incydentne. *Maksymalny stopień* wierzchołka w grafie oznaczany jest przez Δ .

Kolorowanie krawędzi grafu G jest to przyporządkowanie wszystkim krawędziom z G liczb naturalnych - nazywanych *kolorami*. *Silnym kolorowaniem krawędzi* grafu G nazywamy kolorowanie krawędzi z G , w którym każda krawędź $e = uv$ musi dostać inny kolor niż wszystkie krawędzie incydentne z wierzchołkami sąsiadującymi z u lub v . *Silnym indeksem chromatycznym* grafu G (ozn. $\chi'_2(G)$) nazywamy najmniejszą liczbę kolorów w silnym kolorowaniu grafu G .

Erdős i Nešetřil postawili hipotezę, według której dla grafu G o maksymalnym stopniu Δ wartość silnego indeksu chromatycznego nie przekracza $\frac{5}{4}\Delta^2$. Chcemy przybliżyć się do rozwiązania owej hipotezy poprzez badanie powiązanego problemu: określenie maksymalnego rozmiaru silnej kliky w grafie G .

Silną kliką w grafie G nazywamy zbiór krawędzi z G , z których każde dwie są incydentne do wspólnego wierzchołka lub do dwóch sąsiadujących ze sobą wierzchołków. Oczywiście jest, że jeżeli F jest silną kliką w grafie G to wszystkie krawędzie z F muszą dostać różne kolory w silnym kolorowaniu krawędzi G . Wynika z tego, że wartość silnego indeksu chromatycznego grafu G nie może być mniejsza od rozmiaru największej silnej kliky w G . Badanie silnych klik w grafach pozwoli nam zatem znaleźć dolne ograniczenie na silny indeks chromatyczny.

Problem silnych klik nabiera jeszcze większego znaczenia w połączeniu z hipotezą Reed'a z 1998 r. Jeżeli jest ona prawdziwa, to poprawienie znanego ograniczenia na maksymalny rozmiar silnej kliky w grafie G dałoby nam poprawę górnego ograniczenia na silny indeks chromatyczny G . Byłby to istotny krok w stronę rozwiązania hipotezy Erdős'a i Nešetřil'a.

W naszym projekcie zajmiemy się również uogólnieniem problemu silnego kolorowania krawędzi grafu G , jakim jest *t-silne kolorowanie krawędzi* G (dla $t = 2$ jest to problem silnego kolorowania). Poszukamy także ograniczenia na maksymalny rozmiar *t-silnej kliky* w G (uogólnienie silnych klik).

Wierzmy, że nasz projekt przyniesie znaczący postęp w pracach nad hipotezą Erdős'a i Nešetřil'a i powiązanymi problemami. Warto zauważyć, że dotychczasowe wyniki związane z silnymi i t-silnymi klikami były zazwyczaj produktem ubocznym rozważań nad silnym i t-silnym kolorowaniem krawędzi grafów. Oczekujemy, że skupienie się bezpośrednio na znalezieniu ograniczeń na rozmiar silnych i t-silnych klik pozwoli nam uzyskać lepsze wyniki.