

Rozwiązania okresowe symetrycznych układów hamiltonowskich (popularnonaukowe streszczenie projektu)

Zagadnienia fizyki są opisywane różnymi równaniami, których rozwiązywanie pozwala nam przewidywać zachowanie badanego zjawiska, określać jego właściwości oraz weryfikować przeprowadzane eksperymenty. Szczególnie interesujące jest badanie czy dany problem **zachowuje się okresowo** tzn. po pewnym czasie powraca do punktu wyjścia i zachowuje się dokładnie tak samo jak wcześniej. Takie zachowanie jest nam bardzo bliskie – ruch planet układu słonecznego jest okresowy, dlatego jesteśmy w stanie mówić o porach roku, przewidywać na wiele lat naprzód zaćmienia Słońca oraz planować z wielką dokładnością trasy lotu satelit i statków kosmicznych. Zagadnienia okresowości nie ograniczają się oczywiście do mechaniki nieba, ale odgrywają również rolę w wielu problemach fizyki, chemii czy ekonomii.

Jednymi z najważniejszych narzędzi do opisu modeli są tzw. **równania hamiltonowskie** oraz równania newtonowskie, które możemy przekształcić na te pierwsze. Okazuje się, że wiele takich równań wykazuje pewne **symetrie**, np. nie zależą od obrotu całego badanego układu lub zamiany kolejności jego elementów. **Projekt skupiony jest wokół badania istnienia rozwiązań okresowych równań hamiltonowskich z symetriami** w otoczeniu rozwiązań stacjonarnych, czyli takich warunków, dla których badany układ wcale nie zmienia się wraz z upływem czasu. **Udowodnimy**, że przy odpowiednich założeniach możemy być pewni **istnienia rozwiązań okresowych** danego problemu, co więcej: będziemy w stanie stwierdzić, po jakim czasie układ powróci do punktu wyjścia, czyli **oszacować okres minimalny istniejących rozwiązań**. Podkreślimy, że **stawiane przez nas hipotezy** znacząco **uogólniają** znane twierdzenia Bergera, Szulkina czy Dancera i Rybickiego.

Istnienie symetrii w równaniu dostarcza nam dodatkowych informacji, ale jednocześnie wymaga niestandardowych narzędzi do jego badania. Wobec tego częścią projektu jest **rozwijanie oraz adaptacja** tzw. metod niezmienniczych do zastosowania ich nie tylko w równaniach hamiltonowskich, ale także w wielu innych zagadnieniach wyposażonych w pewne symetrie.

Naszą motywacją do zajęcia się tematyką istnienia rozwiązań okresowych problemów z symetriami było tzw. **zagadnienie N -ciał**, czyli badanie ruchu danej liczby ciał (planet, atomów itd.) pod wpływem wzajemnych sił (grawitacji, siły elektrostatycznej itd.). Z uwagi na to, że symetrie (zazwyczaj obroty) są naturalnym elementem równań opisujących rzeczywiste zjawiska, nieodłączną częścią dowodzenia twierdzeń będzie ich **zastosowanie** do problemów mechaniki klasycznej, kwantowej i nieba. Jednym z najważniejszych opisów takich zjawisk są **równania Lennarda–Jonesa**, odgrywające niebagatelną rolę w fizyce molekularnej. Drugi ważny przykład stanowią **równania Schwarzschilda**, które mają duże znaczenie w teorii względności Einsteina i badaniu czarnych dziur. Te dwa zagadnienia będą podstawami części aplikacyjnej projektu, przy czym nie wykluczamy stosowania naszych twierdzeń i metod również do innych równań pochodzących z fizyki.