Popularnonaukowe streszczenie projektu

Fakt, że metody teorii funkcji zmiennej zespolonej mogą być wykorzystywane do dowodzenia twierdzeń o charakterze arytmetycznym nie jest oczywisty. Pierwsze próby tego typu można odnaleźć w pracach Eulera, a później Dirichleta. Historycznie pierwszą pracą systematycznie odwołującą się do metod analitycznych przy badaniu rozmieszczenia liczb pierwszych był słynny memoriał B. Riemanna z 1856 roku, w którym autor rozważał funkcję $\zeta(s)$ (obecnie zwaną funkcją dzeta Riemanna) w pełnej ogólności, to znaczy jako funkcję zmiennej zespolonej s, opisał jej podstawowe własności oraz wytyczył kierunek przyszłych badań. W szczególności odkrył znaczenie tak zwanych zer nietrywialnych funkcji dzeta oraz sformułował słynną Hipotezę Riemanna. W wyniku intensywnych prac kilku pokoleń matematyków odkryto wiele funkcji specjalnych, podobnych do $\zeta(s)$, zwanych funkcjami typu L. Wyróżnia je kilka charakterystycznych własności takich jak to, że na półpłaszczyźnie $\Re(s) > 1$ zdefiniowane są przy pomocy szeregu Dirichleta, mają przedłużenie meromorficzne na całą płaszczyznę zespoloną oraz spełniają równanie funkcyjne typu riemannowskiego z wieloma czynnikami gamma. Aksjomatyczne ujęcie teorii funkcji L zawdzięczamy A. Selbergowi, który w 1989 roku zdefiniował pewną klasę szeregów Dirichleta, obecnie zwaną klasą Selberga. Opis jej struktury ma zasadnicze znaczenie dla teorii liczb. Istnieje kilka otwartych i bardzo śmiałych hipotez w tym względzie. Jednymi z najważniejszych są Hipoteza o Stopniu oraz hipoteza postulująca prawdziwość tak zwanego ogólnego twierdzenia odwrotnego. Wspólnie przewidują one, że klasa Selberga — z dokładnością do normalizacji — pokrywa się z klasą funkcji Langlandsa związanych z reprezentacjami automorficznymi grup GL_n. Proponowany projekt ma na celu przeprowadzenie badań mających na celu

(A) dokonanie postępu w opisie struktury klasy Selberga i rozszerzonej klasy Selberga, głównie w przypadku stopnia 2,

(B) rozszerzenie obszaru zastosowań funkcji z klasy Selberga w teorii liczb, w szczególności dokonanie postępu w opisie własności faktoryzacyjnych w półgrupach analitycznych, a także zastosowanie metod analitycznych do konstrukcji algorytmów obliczeniowej teorii liczb oraz analizy ich złożoności.

Głównym środkiem dowodowym w punkcie (A) będzie rozwinięta we wcześniejszych pracach J. Kaczorowskiego i A. Perellego metoda nieliniowych splotów funkcji L. Okazała się ona bardzo skuteczna przy badaniu struktury klasy Selberga. Wydaje się, że metoda splotów (szczególnie wielowymiarowych) ma duży potencjał i jej znaczenie oraz zakres stosowalności nie jest jeszcze dostatecznie wyjaśniony.

Metody wykorzystwane w (B) będą należały do arsenału środków współczesnej analitycznej teorii liczb (rozwinięcia asymptotyczne, tak zwane formuły dokładne, całkowanie zespolone itp.) Kluczem do zrozumienia głębszycgh zagadnień z zakresu ilościowej teorii faktoryzacji będzie dostatecznie precyzyjny opis niezależności różnych funkcji L, w szczególności stwierdzanie istnienia osobliwości kombinacji logarytmów i potęg o wykładnikach zespolonych funkcji z klasy Selberga.