Celem naukowym projektu badawczego jest opracowanie nowatorskiego algorytmu numerycznego, który umożliwi rozwiązywanie równań różniczkowych zwyczajnych ułamkowych rzędów z dokładnością wielokrotnie wyższą niż jest to możliwe obecnie, oraz stałą, tzn. niezależną od założonej dokładności niską złożonością czasową obliczeń dzięki zastosowaniu metody ortogonalnych punktów kolokacyjnych. Metoda ta wykorzystuje bazę funkcji, które mają podobnych kształt, co poszukiwane rozwiązanie równania różniczkowego.

Powody podjęcia badań: 1) Nieregularność we wzorze na pochodne i całki ułamkowych rzędów Riemanna-Liouville'a obniża drastycznie dokładność obliczeń z wykorzystaniem rachunku różniczkowego i całkowego ułamkowych rzędów z zastosowaniem metod numerycznych. 2) Nielokalny charakter pochodnych ułamkowych rzędów implikuje uwzględnienie w obliczeniach wartości funkcji z całego zakresu. 3) Sztywne równania różniczkowe, do których rozwiązywania zwykle stosuje się metody niejawne, wymagają w każdym kroku rozwiązania układów równań liniowych lub nieliniowych w zależności od typu rozwiązywanego równania różniczkowego.

Utrudnienia wskazane w pkt. 1-3 powodują, że rozwiązywanie równań różniczkowych ułamkowych rzędów za pomocą komputera jest niezwykle trudne. Brak jest uniwersalnych narzędzi do realizacji tego celu. Z drugiej jednak strony nielokalny charakter operatorów różniczkowania i całkowania ułamkowych rzędów jest znakomitym instrumentem do opisu pamięci oraz dziedzicznych właściwości procesów fizycznych. Już w 2015 wiarygodne źródła podawały ponad 30 praktycznych jego zastosowań: od formułowania problemów elektrochemicznych, nowatorskich algorytmów segmentacji obrazów po teorię sterowania. Nic więc dziwnego, że algorytmy rozwiązywania równań różniczkowych ułamkowych rzędów stanowią obecnie dużą część publikowanych artykułów w czasopismach poświęconych metodom numerycznym.

Równania różniczkowe są używane do symulacji rozmaitych zjawisk. Jeśli użyta metoda do ich rozwiązywania gwarantuje wysoką dokładność i dużą stabilność, symulacje z ich użyciem umożliwiają nowe odkrycia naukowe, szczególnie w przypadku tych rozwiązań, które są na granicy stabilności i tych, których czas symulacji jest długi.

Rozwiązanie zaproponowane w niniejszym projekcie badawczym zakłada: a) zastosowanie do obliczeń kwadratury Gaussa-Jacobiego, ze względu na zbieżność kształtu wielomianów Jacobiego odpowiedniego rzędu z kształtem rdzenia we wzorach Riemanna-Liouville'a. Fakt ten jest kluczem do zminimalizowanie wpływu nieregularności na dokładność obliczeń, a także do powodzenia zastosowania metody punktów kolokacyjnych, b) zastosowanie wysokiej precyzji w obliczeniach numerycznych umożliwia: eliminację typowych błędów występujących w ich trakcie oraz zwiększenie możliwości istniejącej arytmetyki komputerowej.

Realizacja celu określonego w ramach niniejszego projektu badawczego wymaga: 1) Implementacji nowych lub zmodyfikowania istniejących metod numerycznych do obliczania: wartości wielomianów Gaussa-Jacobiego dowolnego rzędu i jego pochodnej, miejsc zerowych tych wielomianów oraz tzw. wag koniecznych do budowy kwadratury, rozwiązywania układów równań liniowych i nieliniowych, 2) Implementacji komputerowej oraz połączenia wyselekcjonowanych metod w jeden program do rozwiązywania równań różniczkowych zwyczajnych ułamkowych rzędów, a także: 3) Analizy dokładności i efektywności zaimplementowanych z wykorzystaniem bibliotek wysokich precyzji wszystkich części składowych algorytmu rozwiązywania równań różniczkowych zwyczajnych ułamkowych rzędów oraz oceny ich praktycznej efektywności i dokładności.