W niniejszym projekcie chcemy zająć się problemami kolorowania online i $L(2,1)$-etykietowania grafów definiowanych geometrycznie. Tematyka grafów geometrycznych jest od wielu lat intensywnie badana, zarówno ze względu na powiązania teoretyczne jak i na motywacje praktyczne. W szczególności różne zagadnienia kolorowania, które są przedmiotem niniejszego projektu, można odnieść do problemów rzeczywistych, np. przydziału częstotliwości czy szczelin czasowych w sieciach telekomunikacyjnych.

Grafem nazywamy parę dwóch zbiorów: pierwszy z nich nazywamy zbiorem *wierzchołków*, drugi zaś zawiera pary różnych wierzchołków, a każda taka para nazywana jest *krawędzią*. O wierzchołkach, które tworzą jedną z krawędzi mówimy, że sąsiadują ze sobą w grafie. Grafy często modelują sytuacje konfliktu (lub odwrotnie: relacji pozytywnej) między różnymi obiektami. Jednym z klasycznych zagadnień rozważanych w teorii grafów jest tzw. kolorowanie grafów. Celem jest przydzielenie każdemu wierzchołkowi koloru z ustalonego zestawu, by wierzchołki sąsiadujące otrzymały różne kolory. Chcemy przy tym użyć jak najmniejszej liczby kolorów. Projekt ten dotyczy *grafów przecięć* figur geometrycznych, które są definiowane następująco: zbiorem wierzchołków jest zestaw figur, a dwa wierzchołki są połączone krawędzią w grafie, jeśli odpowiadające im figury się przecinają. W tym projekcie skupimy się na dwóch klasach tego typu grafów: grafach przecięć kół na płaszczyźnie oraz grafach przecięć przedziałów w zbiorze liczb rzeczywistych.

Aby to lepiej zobrazować, wyjaśnijmy w jaki sposób mogą one modelować konflikty w sieci telekomunikacyjnej. Jeśli bowiem przyjmiemy, że koła przedstawiają obszary zasięgów poszczególnych nadajników, to przecinanie się dwóch kół oznacza, że np. powinniśmy nadać tym nadajnikom inne częstotliwości (czyli kolory w kolorowaniu). Różne rodzaje geometrycznie definiowanych grafów i typów kolorowania mogą uwzględniać różne własności i wymagania poszczególnych typów sieci telekomunikacyjnych. Np. $L(2,1)$-etykietowanie polega na tym, że wierzchołki sąsiadujące muszą mieć kolory odległe o co najmniej 2, zaś wierzchołki mające wspólnego sąsiada musza mieć kolory o co najmniej 1. Taki model kolorowania odpowiada sytuacji, gdy uwzględnimy, że w pewnych okolicznościach częstotliwości będące blisko siebie mogą interferować (stąd "mocniej" odróżniamy sąsiadów), a z kolei wspólny sąsiad dwóch nadajników powoduje, że te dwa nadajniki również powinny otrzymać różne częstotliwości. W wielu tego typu zagadnieniach interesujący nas obiekt nie jest w całości znany, ale pojawia się stopniowo (np. sieć telekomunikacyjna jest stopniowo rozbudowywana). Takie problemy określa się mianem *online* i takie właśnie wersje kolorowania i etykietowania stanowią główną część stawianych zadań badawczych. Kolorowanie grafu online oznacza, że graf na początku nie jest znany i poznajemy go wierzchołek wierzchołku. W każdej rundzie wprowadzany jest jeden nowy wierzchołek wraz z krawędziami do dotychczas poznanych wierzchołków i od razu musi zostać pokolorowany. Co ważne, raz dokonanego wyboru nie można później zmienić, więc sytuacja jest trudniejsza.

W naszej pracy chcemy zająć się przede wszystkim projektowaniem lepszych algorytmów (czyli przepisów/sposobów) kolorujących i etykietujących online, jak również teoretycznymi ograniczeniami na możliwą jakość algorytmów. Naturalnie, kluczem do sukcesu jest wykorzystywanie szczególnych geometrycznych własności grafów przecięć. W ramach próby głębokiego zbadania tych geometrycznych własności zajmiemy się również pewnymi zagadnieniami kolorowania płaszczyzny związanymi z klasycznym problemem Hadwigera-Nelsona. Pytanie w owym problemie brzmi: Ile różnych kolorów wystarczy do pokolorowania wszystkich punktów nieskończonej płaszczyzny tak, aby każda para punktów w odległości dokładnie jeden miała różne kolory? Wiadomo, że można to zrobić przy pomocy 7 kolorów przy pomocy dość prostego schematu, ale mniej niż 4 kolory nie wystarczy - minimalna wartość nie jest znana. Okazuje się, że tego typu pytania są nie tylko ciekawe z matematycznego punktu widzenia, ale również pozwalają konstruować lepsze algorytmy we wcześniej opisanych przypadkach grafów przecięć.

Stworzone w ramach projektu algorytmy, ograniczenia i schematy kolorowania mają nie tylko uzupełnić wiedzę i dostarczyć rozwiązań w konkretnych problemach, ale przede wszystkim pozwolą na rozwinięcie technik i nowatorskich pomysłów, które znajdą szersze zastosowanie przy projektowaniu algorytmów kolorowania obiektów geometrycznych. W konsekwencji projekt może przynieść korzyści zarówno w zakresie teoretycznym, jak i w powiązanych problemach rzeczywistych.