Grupy homologii przestrzeni konfiguracyjnych dla cząstek na grafach

Graf to zbiór punktów - zwanych wierzchołkami i krawędzi, które łączą ze sobą pewne wybrane wierzchołki. Przykładem grafu, z którego codziennie korzystają setki tysięcy ludzi jest metro - wierzchołkami są tu stacje zaś krawędziami tunele je łączące. Są również grafy, które są tak małe, że nie można zobaczyć ich gołym okiem. Wytwarza się je w zaawansowanych technologicznie laboratoriach łącząc ze sobą *nano-przewody*, których średnica nie przekracza kilku milionowych części milimetra. Obiekty zamieszkujące takie *nano-grafy* to cząstki, które są tak małe, że ich ruch opisany jest prawami mechaniki kwantowej, a nie prawami fizyki Newtonowskiej, które znamy z życia codziennego.

Rozważmy sytuację, w której na grafie umieszczamy n obiektów. Mogą to być pociągi metra czy też wspomniane cząstki. Możemy rozmieścić je w dowolny sposób, aczkolwiek zastrzegamy, że dwa obiekty nie mogą zostać umieszczone w tym samym miejscu. Takie rozmieszczenie będziemy nazywać *dozwoloną konfiguracją*. Obszarem naszych badań będzie zbiór wszystkich dozwolonych konfiguracji n obiektów na grafie. Wyobraźmy sobie teraz, że rozważane obiekty mogą się poruszać wzdłuż krawędzi grafu, zaś w wierzchołkach skręcać w inne krawędzie. Wiemy jednak, że dwa obiekty nie mogą być w tym samym miejscu w tym samym czasie wiec zderzenia są wykluczone.

Nasz problem badawczy dotyczy cząstek kwantowych poruszających się w nano-grafach. Ważną cechą takich cząstek jest ich nierozróżnialność - nie ma eksperymentu, który by rozróżniał je od siebie. Z punktu widzenia dozwolonych konfiguracji interesować nas będzie więc tylko to czy w pewnym miejscu na grafie jest cząstka, a to która to jest cząstka nie będzie miało znaczenia. Okazuje się, że nierozróżnialność cząstek niesie głębokie konsekwencje dla mechaniki kwantowej. Gdy rozważamy mechanikę kwantową w otaczającej nas trójwymiarowej przestrzeni, nierozróżnialność cząstek sprawia, że ze względu na ich grupowe zachowanie mamy dwa możliwe typy cząstek zwane fermionami i bozonami (to jakiego typu jest dana cząstka określone jest inną wielkością kwantową zwaną spinem). Przykładowo elektrony są fermionami, czego przejawem jest to, że muszą spełniać kolejne ważne prawo kwantowe zwane zakazem Pauliego, który ma fundamentalne znaczenie dla zrozumienie układu okresowego pierwiastków chemicznych. Te dwie możliwości razem, tj. bozony lub fermiony, nazywamy statystykami kwantowymi.

Ważnym i zaskakującym odkryciem w fizyce kwantowej w ciągu ostatnich 50 lat było zrozumienie, że ograniczenie ruchu cząstek do dwóch wymiarów daje możliwość istnienia nowych statystyk kwantowych zwanych anyonami. Nasze niedawne badania potwierdziły, że cząstki poruszające się na grafie mają jeszcze bagatsze możliwości statystyk, które zależą od topologii grafu. Badania te oparte były na analizie najprostszych własności przestrzeni konfiguracji wielu cząstek na grafie. W obecnym projekcie chcemy dowiedzieć się jakie nowe formy statystyk kwantowych są możliwe gdy weźmiemy pod uwagę bardziej skomplikowane dane topologiczne zwane wyższymi grupami homologii. W szczególności, zainteresowani jesteśmy pewną szczególną częścią grup homologi, jaką jest torsja. Nasze obecne metody pozwalają nam zbadać najprostszy przypadek, w którym możemy liczyć na pojawienie się nowych rodzajów statystyk, czyli trzecią grupę homologii.