Popularno-naukowe streszczenie projektu

Konfiguracje prostych są bardzo popularnym obiektem badań z zakresu kombinatoryki i geometrii. Przez konfigurację prostych rozumiemy skończony zbiór prostych na płaszczyźnie wraz z wszystkimi punktami osobliwymi, tzn punktami, gdzie przecinają się dwie lub więcej prostych. Definicja ta daje się sformułować bardzo elementarnym językiem, podobnie jak większość problemów matematycznych dotyczących konfiguracji prostych. Jednak prostota wypowiedzi nie idzie tu w parze z łatwością rozstrzygnięcia tychże problemów. Trudności te czynią je dodatkowo interesującymi, stąd konfiguracje prostych, a także pochodzące od nich zbiory punktów cieszyły się, i nadal cieszą szerokim zainteresowaniem badawczym.

Najbardziej znanym problemem związanym z konfiguracjami prostych jest tzw. "problem sadzenia drzew" sformułowany w 1821 roku przez Jacksona w formie następującej zagadki

Jak strukturę sadu zaplanować,
by tyle samo rzędów, co i drzew w całość wkomponować
i by każdy rząd trzy drzewa zajmowały?
Czy podejmie wyzwanie ktoś wytrwały?

Zagadka ta ma silny związek z ogólnie znanym twierdzeniem Sylvestera–Gallai, które mówi, że dla każdego skończonego zbioru niewspółliniowych punktów na płaszczyźnie euklidesowej istnieje prosta, nazywana *prostą zwyczajną*, przechodząca przez dokładnie dwa z tych punktów. Warto w tym miejscu zauważyć, że twierdzenie Sylvestera–Gallai nie jest prawdziwe nad ciałem liczb zespolonych. Przykładem na to jest słynna konfiguracja Hessego 12−tu prostych spotykających się dokładnie w 9-ciu punktach poczwórnych w taki sposób, że na każdej prostej znajdują się dokładnie 3 punkty.

Fakt, że nad ciałem liczb rzeczywistych każda konfiguracja musi zawierać przynajmniej jedną prostą zwyczajną, rodzi pytanie o minimalną wymaganą liczbę takich prostych. Równocześnie interesującym problemem jest pytanie o maksymalną możliwą liczbę punktów potrójnych, jakie możemy uzyskać mając skończony zbiór prostych. Ostatnimi czasy właśnie te dwa pytania nadawały główny kierunek rozważaniom na temat konfiguracji prostych. Konfiguracje generujące względnie dużą liczbę punktów potrójnych okazały się dawać kontrprzykłady na pewne inkluzje między potęgami ideałów (zwykłą i symboliczną) w geometrii algebraicznej. Pierwszy znaleziony kontrprzykład, nad liczbami zespolonymi, pochodzi od zbioru punktów potrójnych konfiguracji dualnej do konfiguracji Hessego. Kolejne kontrprzykłady, nad ciałem liczb rzeczywistych i wymiernych, również pochodzą od zbiorów prostych, a konkretnie od konfiguracji Böröczky'ego 12−tu prostych z 19−oma punktami potrójnymi, opublikowanej w 1984 roku przez Fürediego i Palastiego. Prosta modyfikacja tej właśnie konfiguracji okazała się jedynym znanym jak dotąd kontrprzykładem na wspomniane zawieranie. Interesujący jest również fakt, że konstrukcja tej konfiguracji zależy od jednego parametru, co w efekcie daje całą rodzinę konfiguracji 12−tu prostych realizowalną nad ciałem liczb wymiernych (w odróżnieniu od konfiguracji Böröczky'ego 15−tu prostych, której nad liczbami wymiernymi nie da się skonstruować).

Ten wynik stał się główną motywacją moich badań w tym zakresie. Przede wszystkim chciałabym ustalić, jak wyglądają przestrzenie parametrów dla pewnych konfiguracji prostych (w tym dla nie badanych jeszcze konfiguracji Böröczky'ego) oraz zbadać, które z nich można skonstruować nad ciałem liczb wymiernych. Przestrzenie parametrów dla konfiguracji prostych mogą być interpretowane jako pewne dywizory w $(\mathbb{P}^1)^k$ albo jako płaskie krzywe osobliwe. Obydwie interpretacje prowadzą do ciekawych konkluzji i dają związki pomiędzy kształtem konfiguracji, a pewnymi obiektami algebraicznymi. Chciałabym również znaleźć więcej kontrprzykładów nad liczbami wymiernymi na wspomniane inkluzje między ideałami. Uważam za bardzo interesujący fakt, iż pomimo licznych poszukiwań w tym zakresie w różnych kręgach badawczych w ciągu ostatnich kilku lat, wciąż jedynym znanym kontrprzykładem jest ten pochodzący od 12−tu prostych Böröczky'ego. Dlatego chciałabym pogłębić badania w tym zakresie, jak również rozszerzyć ostatnio otrzymane, między innymi przeze mnie, wyniki dla konfiguracji 12−tu i 15−tu prostych Böröczky'ego na jak największą liczbę konfiguracji.